FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Introdución á análise multivaluada e ás inclusións diferenciais

Nuria Méndez Alonso

2019/2020

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Introdución á análise multivaluada e ás inclusións diferenciais

Nuria Méndez Alonso

Xuño, 2020

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Traballo proposto

Área de Coñecemento: Análise Matemática
Título: Introdución á análise multivaluada e ás inclusións diferenciais
Breve descrición do contido
Fundamentación dos conceptos básicos da análise de funcións que toman valores conxuntistas: continuidade superior e inferior, existencia de seleccións medibles, integrabilidade. Modelos matemáticos en termos de inclusións diferenciais. Existencia de solucións mediante teoremas de punto fixo de operadores abstractos multivaluados. Aplicacións ás ecuacións diferenciais descontinuas.
Recomendacións
Outras observacións

Índice xeral

Resumo

Neste traballo preséntanse as nocións básicas das aplicacións multivaluadas e as súas propiedades e caracterizacións máis importantes. Ó contrario do que ocorría para aplicacións univaluadas onde só había un tipo de continuidade, veremos que para aplicacións multivaluadas existen dous tipos, a semicontinuidade superior e a inferior. Isto é debido a que a imaxe recíproca dunha aplicación multivaluada pode definirse de dúas formas distintas. Ademais farase unha recopilación dos principais resultados de punto fixo para aplicacións multivaluadas, como por exemplo o Teorema de Kakutani, e xeneralizaranse a este contexto outros resultados ben coñecidos para aplicacións univaluadas, como o Teorema de punto fixo de Banach.

Posteriormente cómpre destacar o Teorema de selección de Michael que asegura a existencia de seleccións continuas para aplicacións semicontinuas inferiormente.

Como consecuencia da teoría, veremos as inclusións diferenciais, que xeneralizan as ecuacións diferenciais ordinarias. Neste sentido probaremos unha versión do teorema de existencia de Peano para inclusións diferenciais. Observaremos tamén que esta teoría se pode aplicar á Teoría de xogos para probar entre outros moitos resultados, o Teorema de Nash.

Abstract

This manuscript shows the basics of multivalued mappings and their most important properties and characterizations. Contrary to what happened for singlevalued mappings where there was only one type of continuity, we will see that for multivalued mappings there are two types, the upper and the lower semicontinuity. This is because reciprocal image of a multivalued mapping can be defined by two different ways.

In addition, we will present a review of the main fixed point results for multivalued mappings, such as Kakutani's theorem, and other well-known results for singlevalued mappings will be generalized to this context, such as Banach's fixed point theorem.

To continue, it is necessary to emphasize the Selection Theorem of Michael that assures the existence of continuous selections for lower semicontinuous mappings.

As a consequence of the theory, we will look at differential inclusions, which generalize ordinary differential equations. In this sense we will prove a version of Peano's existence theorem for differential inclusions. We will also note that this theory can be applied to Game Theory to prove among many other results, Nash's Theorem.

Introdución

Neste traballo móstrase unha introdución á analise multivaluada de funcións. Estudaremos os conceptos relacionados coa continuidade (semicontinuidade superior e inferior). No caso de aplicacións univaluadas, podemos definir a continuidade como:

a) A imaxe recíproca dun aberto é un aberto.

b) A imaxe recíproca dun pechado é un pechado.

Obviamente, as condicións a) e b) son equivalentes. Porén, no caso de aplicacións multivaluadas iso non é certo, pois a imaxe recíproca dunha aplicación multivaluada pode definirse de dúas formas distintas, o que motiva as dúas definicións de continuidade. Comezaremos falando da primeira destas, a definición en termos de abertos, de $\varepsilon - \delta$, e despois, iremos presentando numerosas caracterizacións e propiedades que teñen estas aplicacións. Posteriormente abordaremos as funcións semicontinuas inferiormente, seguindo un paralelismo co feito coas funcións semicontinuas superiormente.

Como no caso de aplicacións multivaluadas a imaxe de cada punto é un conxunto, será habitual (e necesario) nos resultados presentados neste traballo impoñer hipóteses sobre as propiedades deses conxuntos. Neste sentido, con frecuencia as imaxes de cada punto deben tomar valores convexos, pechados ou compactos.

No seguinte capítulo preséntase unha pincelada da Teoría de punto fixo, que é unha parte integral da topoloxía dende os comezos da mesma na obra de Poincaré a finais do século XIX. Poincaré demostrou que as solucións de certos problemas analíticos se podían estudar definindo un conxunto X e unha función $f : X \longrightarrow X$ de tal xeito que as solucións do problema correspondesen os puntos fixos da función f, isto é, os puntos $x \in X$ tales que $f(x) = x$. Faremos unha mención aos teoremas de punto fixo máis destacables na historia das matemáticas como son os debidos a Brouwer e a Schauder, que son a base de teoremas máis xerais como é o caso do Teorema de Bohnenblust-Karlin que asegura a existencia de puntos fixos para aplicacións multivaluadas sobre espazos normados, estendendo deste xeito o Teorema de punto fixo de Kakutani, que aplica no caso de espazos de dimensión finita. Por último presentaremos a versión multivaluada do teorema de alternativa de Leray-Schauder e unha xeneralización do Teorema de punto fixo de Banach.

Como veremos, a noción de continuidade para aplicacións multivaluadas útil na teoría de punto fixo é a de semicontinuidade superior, que permite xeneralizar gran parte dos teoremas de punto fixo existentes para aplicacións univaluadas continuas.

Por outra banda, un dos problemas máis importantes da análise multivaluada é establecer baixo certas condicións de regularidade (medible, continua, lipschiziana) dunha aplicación multivaluada, condicións suficientes para a existencia dunha selección. O obxetivo do terceiro capítulo é recopilar diversos resultados en relación a isto.

Cando a aplicación en cuestión é semicontinua inferiormente destaca o Teorema de selección de Michael, que establece condicións suficientes para que unha aplicación multivaluada admita unha selección continua. Ademais estudaremos algúns exemplos para ver a necesidade de certas condicións no Teorema de Michael. Concluiremos o capítulo vendo unha aplicación do mesmo á extensión de funcións continuas en espazos de Banach.

Por último utilizamos a teoría antes desenvolvida para presentar unhas aplicacións das funcións multivaluadas.

As aplicacións multivaluadas ou correspondencias, proporcionan modelos capaces de emular a evolución de procesos cuxas fases abarcan zonas do espazo xeralmente multivaluadas, o cal as habilita cun potencial para as aplicacións maior que o ofrecido pola teoría de funcións univaluadas. Dende logo, existen escenarios onde resulta impráctico o reemplazo dun modelo univaluado por un multivaluado, aínda que a teoría que xira en torno a este último paradigma conteña a do primero como caso particular. Porén, a abundancia dos desafíos tecnolóxicos que popularon nas últimas décadas, revelaron o limitadas que resultan as estructuras univaluadas á hora de interpretar moitos dos seus problemas fundamentais. Esta conxetura impulsou o desenvolvemento da teoría das aplicacións multivaluadas, dando frutos significativos que poden evidenciarse en economía, específicamente en teoría de xogos (na que afondaremos), en física, a través do estudo de superconductores e a plasticidade dos seus materiais; en teoría de sistemas, como por exemplo en ecuacións diferenciais descontinuas; e en control óptimo, onde as dinámicas que definen a parte funcional das restriccións dos problemas propostos son parametrizables a través de inclusións diferenciais. Pode verse máis sobre isto na referencia [12].

Na primeira parte do último capítulo introducimos as inclusións diferenciais. Dividiremos a sección en dous casos en función das características das aplicacións coas que estemos a traballar. Comezamos recordando o Teorema de Peano para EDO's que xeneralizamos ao contexto das aplicacións multivaluadas. Todo isto conduciranos á parte máis importante desta sección, a presentación e demostración dun resultado de existencia para inclusións diferenciais. Posteriormente veremos a regularización de ecuacións diferenciais con descontinuidades.

Para rematar o capítulo centrarémonos na Teoría de xogos.

A diario enfréntamonos a problemas ou situacións nas que temos que tomar decisións. Tamén é común observar situacións de conflito entre varias persoas, empresas, etc. Do mesmo xeito, cada un dos participantes terá que elixir unha acción, e as consecuencias para cada un deles, dependerán non só da acción propia, senón das decisións que tomen os demais. Ás veces, será posible cooperar entre algúns dos participantes para obter mellores beneficios e outras veces non. A forma de decidir que acción levar a cabo coñécese como estratexia. A área das matemáticas que analiza e modela este tipo de situacións é a Teoría de xogos e o obxecto de estudo son os chamados xogos. Nesta teoría, un concepto moi importante é o de equilibrio de Nash, introducido por John Nash en 1950.

Nesta sección comezaremos definindo os conceptos de xogo en forma estratéxica e equilibrio de Nash, continuando coa presentación do Teorema de Nash e a súa demostración, para a cal é fundamental o Teorema de Kakutani. Remataremos co famoso exemplo do Dilema do prisioneiro.

Capítulo 1

Aplicacións multivaluadas

No desenvolvemento deste capítulo faremos unha introdución ás aplicacións multivaluadas. Afondaremos nos conceptos de continuidade superior e inferior e veremos unha serie de propiedades en relación a eles.

Sexa X un espazo métrico, denotamos por $\mathcal{P}(X) = \{Y \subset X : Y \neq \emptyset\}$, ao conxunto das partes de X, que está formado por todos aqueles subconxuntos de X distintos do baleiro.

Sexan X e Y dous espazos métricos e supoñamos que a cada punto $x \in X$ se lle asocia un subconxunto non baleiro $\varphi(x)$ de Y. A unha función $\varphi : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ chamáselle función multivaluada ou correspondencia de X en Y.

Non obstante, se $f : X \longrightarrow Y$ diremos que é unha aplicación univaluada, é dicir, se a imaxe por f de cada elemento de X é un elemento de Y. Claramente, as aplicacións univaluadas son un caso particular das multivaluadas.

Neste capítulo usamos principalmente a referencia [5].

1.1. Semicontinuidade superior

Nesta sección estudamos o concepto de función multivaluada semicontinua superiormente, xunto con algunhas das súas propiedades máis relevantes. Ademais de proporcionar varias caracterizacións desta noción de continuidade, afondaremos en resultados semellantes aos que se cumpren para as aplicacións univaluadas continuas. No caso que nos ocupa aquí, a diferencia do que ocorre para aplicacións univaluadas, con frecuencia é necesario impoñer condicións de carácter topolóxico (conexidade, compacidade, convexidade...) sobre a imaxe de cada punto do dominio da aplicación, que como xa mencionamos arriba é un conxunto en lugar dun elemento.

Definición 1.1. Unha aplicación multivaluada $\varphi : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ dise que é semicontinua superiormente nun punto $x_0 \in X$ se para cada conxunto aberto V $\subset$ Y con $\varphi(x_0) \subset V$, existe $U \subset X$ aberto tal que $x_0 \in U$ e $\varphi(U) \subset V$. A aplicación $\varphi : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ dise que é semicontinua superiormente se é semicontinua superiormente para cada $x \in X$.

A continuación presentamos un exemplo dunha función multivaluada semicontinua superiormente.

Exemplo 1.2. Sexa $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a función univaluada definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x < 0, \\ 2, & \text{se} \quad x \geq 0. \end{cases}$$

Definamos a función multivaluada $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ como:

$$F(x) = [0, f(x)].$$

Sexa $p \in \mathbb{R}$. Veremos que F é semicontinua superiormente en p.

Se $p < 0$ entón $F(p) = [0, f(p)] = [0, 1]$. Logo se V é un subconxunto aberto de $\mathbb{R}$ tal que $[0, 1] \subset V$ existe, por exemplo, o conxunto aberto $U = (2p, 0)$ en $\mathbb{R}$ tal que $p \in (2p, 0)$ e $F(x) = [0, 1] \subset V$ para cada $x \in U$.

Se $p > 0$ entón $F(p) = [0, 2]$. Así, se V é un subconxunto aberto de $\mathbb{R}$ tal que $[0, 2] \subset V$ podemos tomar, o conxunto aberto $U = (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$, con $\varepsilon \in (0, p)$, para o que se cumpre que $p \in U$ e $F(x) = [0, 2] \subset V$ para cada $x \in U$.

Se $p = 0$ entón $F(0) = [0, 2]$. Logo se V é un subconxunto aberto de $\mathbb{R}$ tal que $F(0) \subset V$ podemos escoller o conxunto aberto $U = (-\varepsilon, \varepsilon)$, con $\varepsilon > 0$. Claramente $0 \in U$ e, ademais, tense que $F(x) = [0, 1] \subset [0, 2] \subset V$ se $x \in (-\varepsilon, 0)$, e que $F(x) = [0, 2] \subset V$ se $x \in [0, \varepsilon)$.

Polo tanto F é semicontinua superiormente.

No que segue usaremos as seguintes notacións para as imaxes recíprocas das aplicacións multivaluadas.

$$\varphi^{-1}(V) = \{x \in X \mid \varphi(x) \subset V\},$$
$$\varphi_+^{-1}(V) = \{x \in X \mid \varphi(x) \cap V \neq \emptyset\}.$$

Unha definición equivalente para o concepto de aplicación multivaluada semicontinua superiormente é a seguinte:

Definición 1.3. Unha aplicación multivaluada $\varphi : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ dise semicontinua superiormente se para cada aberto $V \subset Y$, o conxunto $\varphi^{-1}(V)$ é aberto en X.

Obsérvese que no caso de funcións univaluadas a noción de semicontinuidade superior equivale á de continuidade.

En termos de conxuntos pechados a definición anterior pódese formular como:

Proposición 1.4. *Unha aplicación multivaluada $\varphi : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ dise que é semicontinua superiormente se e só se para cada pechado $B \subset Y$ o conxunto $\varphi_+^{-1}(B)$ é pechado en X.*

Demostración. Sexa $B \subset Y$ pechado, entón

$$X\backslash\varphi_+^{-1}(B) = \{x \in X \mid \varphi(x) \cap B = \emptyset\} = \{x \in X \mid \varphi(x) \subset Y\backslash B\} = \varphi^{-1}(Y\backslash B)$$

é aberto en X (xa que $Y\backslash B$ é aberto e φ é unha aplicación semicontinua superiormente). Polo tanto, $\varphi_+^{-1}(B)$ é pechado en X.

Probemos agora que φ é semicontinua superiormente se para cada conxunto pechado B, o conxunto $\varphi_+^{-1}(B)$ é pechado. Sexa $V \subset Y$ aberto, temos que ver que $\varphi^{-1}(V)$ é aberto en X. Temos que $Y\backslash V$ é pechado, así que $\varphi_+^{-1}(Y\backslash V)$ é pechado por hipótese. Ademais,

$$X\backslash\varphi_+^{-1}(Y\backslash V) = \varphi^{-1}(Y\backslash(Y\backslash V)) = \varphi^{-1}(V)$$

é aberto en X. En conclusión, φ é semicontinua superiormente. □

A semicontinuidade superior dunha aplicación multivaluada con valores pechados tamén se pode caracterizar en termos de sucesións da seguinte forma:

Proposición 1.5. *Sexa $\varphi : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ unha aplicación tal que $\varphi(x)$ é un subconxunto pechado de Y para todo $x \in X$. A aplicación φ é semicontinua superiormente nun punto $x_0 \in X$ se, e só se, para cada sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converxente a x_0 e para cada aberto $V \subset Y$ tal que $\varphi(x_0) \subset V$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi(x_n) \subset V$, para todo $n \geq n_0$.*

Demostración. Supoñamos que φ é semicontinua superiormente en $x_0 \in X$ e sexa $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ unha sucesión converxente a $x_0 \in X$ e V un aberto tal que $\varphi(x_0) \subset V$. Entón existe un conxunto aberto U en X tal que $\varphi(U) \subset V$. Polo tanto, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converxe a x_0 cando n tende a infinito e existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se ten que $x_n \in U$; entón $\varphi(x_n) \subset V$ para todo $n \geq n_0$.

Por outra banda, se φ non fose semicontinua superiormente en $x_0 \in X$, entón existiría $V \subset Y$ aberto contendo a $\varphi(x_0)$ tal que para cada subconxunto aberto U de X contendo ao punto x_0, se ten que $\varphi(U) \not\subset V$. Consideremos a familia de bólas

$$U_n = B(x_0, \varepsilon_n) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < \varepsilon_n\},$$

con radios $\varepsilon_n = 1/n$, $n = 1, 2, ...$ Entón existe unha sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\varphi(x_n) \not\subset V$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por definición de U_n, tense que $d(x_n, x_0) < \varepsilon_n$. Por tanto $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converxe a x_0 cando n tende a infinito, o que contradí a existencia dun $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi(x_n) \subset V$ para todo $n \geq n_0$. □

A continuación veremos que as aplicacións semicontinuas superiormente levan compactos en compactos e conexos en conexos.

Proposición 1.6. *Sexa $\varphi : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ tal que $\varphi(x)$ é un subconxunto compacto de Y para todo $x \in X$. Se φ é unha aplicación semicontinua superiormente e A é un subconxunto compacto de X, entón $\varphi(A)$ é compacto.*

Demostración. Sexa $\{V_i\}_{i\in I}$ unha cobertura aberta de $\varphi(A)$. Se $\varphi(x)$ é compacto para cada $x \in X$, entón existe un número finito de subconxuntos V_i tal que $\varphi(x) \subset W_x$, onde W_x é a unión dos V_i para cada $x \in A$. Esto implica que a familia $\{W_x\}_{x\in A}$ é unha cobertura aberta de $\varphi(A)$. Sexa $U_x = \varphi^{-1}(W_x)$ para cada $x \in A$. Entón $\{U_x\}_{x\in A}$ é unha cobertura aberta de A en X. Como A é compacto por hipótese, existe unha subcobertura finita $U_{x_1}, U_{x_2}, \dots, U_{x_n}$. Como consecuencia, os conxuntos W_{x_1}, $W_{x_2}, \dots, W_{x_n}$ recobren $\varphi(A)$, e como cada W_{x_i} é unha unión finita de conxuntos en $\{V_i\}_{i\in I}$, obtemos unha subcobertura finita V_{t_1},V_{t_2}, ... , V_{t_k} da cobertura $\{V_i\}_{i\in I}$, concluíndo que $\varphi(A)$ é compacto. □

Para o seguinte resultado usamos principalmente a referencia [9].

Proposición 1.7. *Sexa $\varphi : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ tal que $\varphi(x)$ é un subconxunto conexo de Y para todo $x \in X$. Se φ é unha aplicación semicontinua superiormente e C é un subconxunto conexo de X, entón $\varphi(C)$ é conexo.*

Demostración. Por definición, C é un subconxunto conexo dun espazo topolóxico X se e só se para toda cobertura de C por dous subconxuntos abertos U_1 e U_2 de X (ou por dous subconxuntos pechados) tal que $C \cap U_1 \neq \emptyset$ e $C \cap U_2 \neq \emptyset$, entón $C \cap U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$.

Supoñamos que φ é semicontinua superiormente. Sexan B_1 e B_2 dous subconxuntos pechados de Y cumprindo que:

i) $\varphi(C) \subset B_1 \cup B_2$,

ii) $\varphi(C) \cap B_1 \neq \emptyset$, $\varphi(C) \cap B_2 \neq \emptyset$.

Temos que probar que $\varphi(C) \cap B_1 \cap B_2$ é non baleiro. Para isto, veremos que

$$C \cap \varphi_+^{-1}(B_1) \cap \varphi_+^{-1}(B_2) = \emptyset$$

nos leva a unha contradición.

Pola Proposición 1.4, temos que $\varphi_+^{-1}(B_1)$ e $\varphi_+^{-1}(B_2)$ son pechados en X.

Ademais, por i) e ii) tense que:

i') $C \subset \varphi_+^{-1}(B_1) \cup \varphi_+^{-1}(B_{2)}$, ii') $C \cap \varphi_+^{-1}(B_1) \neq \emptyset$ e $C \cap \varphi_+^{-1}(B_2) \neq \emptyset$.

As condicións i') e i") xunto coa relación $C \cap \varphi_+^{-1}(B_1) \cap \varphi_+^{-1}(B_2) = \emptyset$ contradín o feito de que C sexa conexo.

Sexa agora $x \in C \cap \varphi_+^{-1}(B_1) \cap \varphi_+^{-1}(B_2)$. Por definición $\varphi(x) \cap B_1 \neq \emptyset$ e $\varphi(x) \cap B_2 \neq \emptyset$. Por i), temos que $\varphi(x) \subset B_1 \cup B_2$. Como $\varphi(x)$ é conexo temos que $\varphi(x) \cap B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$. Polo tanto, $\varphi(C) \cap B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$. $\square$

A Proposición 1.6 deixa de ser certa se suprimimos a condición de que $\varphi(x)$ sexa compacto para todo $x \in X$.

Por exemplo se tomamos a aplicación $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ definida por $\varphi(x) = \mathbb{R}$ observamos que non se verifica, pois a imaxe pola aplicación φ é sempre $\mathbb{R}$ que non é compacto.

O mesmo pasa coa Proposición 1.7 cando suprimimos a condición de que $\varphi(x)$ sexa conexo para todo $x \in X$.

Se tomamos a aplicación $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ definida por $\varphi(x) = \mathbb{Q}$ podemos observar que non é certo, pois a imaxe pola aplicación φ é sempre $\mathbb{Q}$ que non é conexo, xa que os únicos subconxuntos conexos de $\mathbb{Q}$ son os formados por un único punto.

A continuación presentamos algúns resultados relativos á composición de aplicacións multivaluadas.

Se $\varphi : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ e $\psi : Y \longrightarrow \mathcal{P}(Z)$ son dúas aplicacións multivaluadas, a composición $\psi \circ \varphi : X \longrightarrow \mathcal{P}(Z)$ defínese como:

$$(\psi \circ \varphi)(x) = \bigcup \{\psi(y) \mid y \in \varphi(x)\}$$

para cada $x \in X$.

Proposición 1.8. *Se $\varphi : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ e $\psi : Y \longrightarrow \mathcal{P}(Z)$ son dúas aplicacións semicontinuas superiormente, entón a composición $\psi \circ \varphi : X \longrightarrow \mathcal{P}(Z)$ é semicontinua superiormente.*

Demostración. Dado $x_0 \in X$ arbitrario e un aberto $U \subset Z$ con $(\psi \circ \varphi)(x_0) \subset U$ temos que ver que existe un aberto $W \subset X$ tal que $x_0 \in W$ e $(\psi \circ \varphi)(W) \subset U$. Por ser ψ semicontinua superiormente en $\varphi(x_0)$, para cada $y \in \varphi(x_0)$ existe un aberto $V_y \subset Y$ tal que $y \in V_y$ e $\psi(V_y) \subset U$. Como φ é semicontinua superiormente en x_0, existe un aberto $W \subset X$ tal que $x_0 \in W$ e $\varphi(W) \subset \bigcup_{y \in \varphi(x_0)} V_y$. Polo tanto

$$\psi(\varphi(W)) \subset \psi(\bigcup_{y \in \varphi(x_0)} V_y) = \bigcup_{y \in \varphi(x_0)} \psi(V_y) \subset U.$$

$\square$

Agora imos ver outra noción de semicontinuidade superior en termos de $\varepsilon - \delta$. Como veremos nos resultados seguintes, ambos conceptos son equivalentes para aplicacións multivaluadas con valores compactos. Porén, en xeral, a clase de aplicacións $\varepsilon - \delta$ semicontinuas superiormente é máis ampla que a de aplicacións semicontinuas superiormente.

Sexa $A \subset X$, denotaremos por $B(A, \varepsilon) = \{x \in X \mid d(x, A) < \varepsilon\}$ á bola de centro o subconxunto A e radio ε ou o que é o mesmo unha ε-veciñanza do subconxunto A.

Definición 1.9. Dicimos que unha aplicación multivaluada $\varphi : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ é $\varepsilon - \delta$ semicontinua superiormente nun punto $x_0 \in X$ se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\varphi(B(x_0, \delta)) \subset B(\varphi(x_0), \varepsilon)$.

Proposición 1.10. *Sexa $\varphi : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ unha aplicación semicontinua superiormente nun punto x_0. Entón φ é $\varepsilon - \delta$ semicontinua superiormente en x_0.*

Demostración. Faremos a demostración por redución ó absurdo. Supoñamos que existe un $\varepsilon_0 > 0$ e unha sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converxente a x_0 tal que $\varphi(x_n) \not\subset B(\varphi(x_0), \varepsilon_0)$, é dicir $\varphi(x_n) \cap (Y \setminus B(\varphi(x_0), \varepsilon_0)) \neq \emptyset$. Entón $x_n \in \varphi_+^{-1}(Y \setminus B(\varphi(x_0), \varepsilon_0))$. Pola Proposición 1.4, $\varphi_+^{-1}(Y \setminus B(\varphi(x_0), \varepsilon_0))$ é pechado, xa que φ é semicontinua superiormente en x_0 e $Y \setminus B(\varphi(x_0), \varepsilon_0)$ é pechado. Isto implica que $x_0 \in \varphi_+^{-1}(Y \setminus B(\varphi(x_0), \varepsilon_0))$, é dicir

$$\varphi(x_0) \cap (Y \setminus B(\varphi(x_0), \varepsilon_0)) \neq \emptyset,$$

o que supón unha contradición. □

Observación 1.11. O recíproco da proposición anterior non se dá en xeral. Se tomamos a aplicación multivaluada $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ definida por:

$$\varphi(t) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = t\}.$$

É fácil ver que a aplicación φ é $\varepsilon - \delta$ semicontinua superiormente, basta tomar $\delta = \varepsilon$. Pola contra, se consideramos a veciñanza $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy < 1\}$ de $\varphi(0)$, entón para cada intervalo aberto $U = (-\delta, \delta)$,

$$\varphi(U) = (-\delta, \delta) \times \mathbb{R}$$

polo que $\varphi(U) \not\subset V$.

Non obstante, podemos observar que a semicontinuidade superior de funcións con valores compactos pode ser formulada no sentido de Cauchy da seguinte forma.

Proposición 1.12. *Sexa $\varphi : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ unha aplicación multivaluada tal que $\varphi(x)$ é un subconxunto compacto de Y para todo $x \in X$. A aplicación multivaluada φ é semicontinua superiormente se, e só se, a aplicación φ é $\varepsilon - \delta$ semicontinua superiormente para todo $x \in X$.*

Demostración. Pola Proposición 1.10 temos que se φ é semicontinua superiormente, entón φ é $\varepsilon - \delta$ semicontinua superiormente.

Vexamos o recíproco. Sexa $x_0 \in X$ e $V \subset Y$ aberto tal que $\varphi(x_0) \subset V$. Queremos ver que existe $U \subset X$ aberto tal que $x_0 \in U$ e $\varphi(U) \subset V$.

Primeiro, probemos que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $B(\varphi(x_0), \varepsilon_0) \subset V$. En caso contrario, para cada $n \in \mathbb{N}$ temos que

$$B\left(\varphi(x_0), \frac{1}{n}\right) \not\subset V,$$

é dicir, para cada $n \in \mathbb{N}$ temos $y_n \in \varphi(x_0)$ e $z_n \in Y$ tal que $d(z_n, y_n) < \frac{1}{n}$ e $z_n \notin V$. Por ser $\varphi(x_0)$ compacto, a sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \varphi(x_0)$ ten unha subsucesión converxente $\{y_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, $y_{n_k} \longrightarrow y_0 \in \varphi(x_0)$. Entón, a subsucesión $\{z_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tamén converxe a $y_0 \in \varphi(x_0) \subset V$, así que ao ser V aberto existe $K \in \mathbb{N}$ tal que se $k \geq K$ entón $z_{n_k} \in V$, contradicindo que $z_n \notin V$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

En definitiva, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $B(\varphi(x_0), \varepsilon_0) \subset V$ e por ser φ $\varepsilon - \delta$ semicontinua superiormente, existe $\delta > 0$ tal que $\varphi(B(x_0, \delta)) \subset B(\varphi(x_0), \varepsilon_0)$.

Agora tomando $U = B(x_0, \delta)$ temos que $x_0 \in U$ e $\varphi(U) \subset B(\varphi(x_0), \varepsilon_0) \subset V$. En conclusión, φ é semicontinua superiormente en x_0. $\square$

Observación 1.13. No resultado anterior usamos o concepto de compacidade secuencial. Nótese que en espazos métricos a compacidade equivale á compacidade secuencial (Teorema de Heine-Borel-Lebesgue). Pode consultarse por exemplo no Teorema 28.2 do libro [10].

A continuación introducimos o concepto de aplicación pechada, que está relacionado co de aplicación semicontinua superiormente, como probaremos nos seguintes resultados.

Definición 1.14. Unha aplicación multivaluada $\varphi : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ dise pechada se o seu grafo,

$$\mathcal{G}r(\varphi) = \{(x, y) \in X \times Y \,:\, y \in \varphi(x)\},$$

é un subconxunto pechado de $X \times Y$.

Lema 1.15. *Unha aplicación multivaluada $\varphi : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ é pechada se, e só se, para cada sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ tales que $x_n \longrightarrow x_*$, $y_n \longrightarrow y_*$ e $y_n \in \varphi(x_n)$, entón $y_* \in \varphi(x_*)$.*

Demostración. Sexa $x_n \longrightarrow x_*$ e sexa $y_n \longrightarrow y_*$ tal que $y_n \in \varphi(x_n)$, entón $(x_n, y_n) \in \mathcal{G}r(\varphi)$. Usando o feito de que o grafo de φ é pechado en $X \times Y$, entón $(x_*, y_*) \in \mathcal{G}r(\varphi)$ o que implica que $y_* \in \varphi(x_*)$. Pola contra, se $(x_n, y_n) \in \mathcal{G}r(\varphi)$ tal que (x_n, y_n) converxe a (x_*, y_*) entón $y_n \in \varphi(x_n)$, $x_n \longrightarrow x_*$ e $y_n \longrightarrow y_*$. Polo tanto, $y_* \in \varphi(x_*)$ así que $(x_*, y_*) \in \mathcal{G}r(\varphi)$, o que proba que φ é pechada. $\square$

Vexamos agora a relación entre as aplicacións semicontinuas superiormente e as aplicacións pechadas.

Proposición 1.16. *Sexa $\varphi : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ unha aplicación semicontinua superiormente tal que $\varphi(x)$ é pechado para cada $x \in X$, entón o grafo $\mathcal{G}r(\varphi)$ é un subconxunto pechado de $X \times Y$.*

Demostración. Probaremos que $X \times Y \backslash \mathcal{G}r(\varphi)$ é aberto. Sexa $(x, y) \notin \mathcal{G}r(\varphi)$. Tomamos unha veciñanza aberta V_y de y en Y e $V_{\varphi(x)}$ de $\varphi(x)$ en Y tal que $V_y \cap V_{\varphi(x)} = \emptyset$, isto é posible por ser $\varphi(x)$ pechado e grazas a que o espazo é normal ou T_4, o cal permite separar pechados por abertos. Sexa $U_x = \varphi^{-1}(V_{\varphi_{(x)}})$. Entón, ao ser φ unha aplicación semicontinua superiormente e $V_{\varphi(x)}$ un subconxunto aberto, U_x é unha veciñanza aberta de x en X. Como consecuencia, o conxunto $U_x \times V_y$ é unha veciñanza aberta de (x, y) en $X \times Y$. Nótese que $U_x \times V_y \cap \mathcal{G}r(\varphi) = \emptyset$. De feito, se $(x', y') \in U_x \times V_y$ entón $\varphi(x') \subset V_{\varphi_{(x)}}$ pero $V_{\varphi_{(x)}} \cap V_y = \emptyset$, polo tanto $y' \notin V_{\varphi_{(x)}}$ e $(x', y') \notin \mathcal{G}r(\varphi)$. En conclusión $U_x \times V_y \subset X \times Y \setminus \mathcal{G}r(\varphi)$ é unha veciñanza aberta do punto (x, y), o que implica que $X \times Y \setminus \mathcal{G}r(\varphi)$ é aberto. □

Observación 1.17. A Proposición 1.16 non é certa se $\varphi(x)$ non é pechado para cada $x \in X$. Se tomamos a aplicación $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ definida por $\varphi(x) = (0, 1)$, vemos que é semicontinua superiormente pero o grafo non é pechado.

Observación 1.18. Obsérvese que o grafo da aplicación $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{se} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{se} \quad x = 0, \end{cases}$$

é pechado, pero f non é semicontinua superiormente, é dicir, continua.

Como mostra a observación anterior, para garantir que unha aplicación pechada sexa semicontinua superiormente, non é suficiente con que os seus valores sexan pechados (ou compactos). Probaremos que basta cunha condición un pouco máis forte: que o seu grafo sexa localmente compacto.

Proposición 1.19. *Se $\varphi : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ é unha aplicación multivaluada cuxo grafo é pechado e localmente compacto (é dicir, para cada $x \in X$, existe un conxunto aberto U_x tal que $\overline{\varphi(U_x)}$ é compacto), entón φ é semicontinua superiormente.*

Demostración. Sexa $x \in X$, V unha veciñanza aberta do conxunto $\varphi(x)$ e U_x unha veciñanza aberta de x tal que $\overline{\varphi(U_x)}$ é compacta en Y. Supoñamos que $Q = \overline{\varphi(U_x)} \backslash V = \overline{\varphi(U_x)} \cap Y \backslash V$ é non baleiro. Xa que o grafo de φ é pechado, pola Definición 1.14 φ é unha aplicación pechada, entón para cada $y \in Q$, existen veciñanzas $V^*(y)$ de y e $U_y(x)$ de x tal que $\varphi(U_y(x)) \cap V^*(y) = \emptyset$. Usando o feito de que Q é compacto, podemos atopar unha cobertura finita $V^*(y_1), V^*(y_2), \cdots, V^*(y_n)$. Polo tanto, se consideramos a veciñanza aberta de x definida por $U_x^* = U_x \cap (\cap_{i=1}^n U_{y_i}(x))$, obtemos que $\varphi(U_x^*) \subset V$, polo tanto φ é semicontinua superiormente. $\square$

1.2. Semicontinuidade inferior

Nesta sección estudamos o concepto de función semicontinua inferiormente e algunhas das propiedades e caracterizacións máis importantes. Seguiremos un paralelismo co feito para as aplicacións semicontinuas superiormente.

Definición 1.20. Unha aplicación multivaluada $\varphi : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ dise semicontinua inferiormente nun punto $x_0 \in X$ se para cada subconxunto aberto $V \subset Y$ con $V \cap \varphi(x_0) \neq \emptyset$, existe un aberto $U \subset X$ tal que $x_0 \in U$ e $V \cap \varphi(x) \neq \emptyset$ para todo $x \in U$. A aplicación $\varphi : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ dise que é semicontinua inferiormente se é semicontinua inferiormente para cada $x \in X$.

A continuación veremos un exemplo dunha función multivaluada semicontinua inferiormente:

Exemplo 1.21. Sexa $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a función univaluada definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x \leq 0, \\ 2, & \text{se} \quad x > 0. \end{cases}$$

Definamos a función multivaluada $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ como:

$$F(x) = [0, f(x)].$$

Sexa $p \in \mathbb{R}$. Veremos que F é semicontinua inferiormente en p.

Se $p < 0$ entón $F(p) = [0, f(p)] = [0, 1]$. Logo se V é un subconxunto aberto de $\mathbb{R}$ tal que $[0, 1] \cap V \neq \emptyset$ existe, por exemplo, o conxunto aberto $U = (2p, 0)$ en $\mathbb{R}$ tal que $p \in (2p, 0)$ e $F(x) = [0, 1] \cap V \neq \emptyset$ para cada $x \in U$.

Se $p > 0$ entón $F(p) = [0, 2]$. Así, se V é un subconxunto aberto de $\mathbb{R}$ tal que $[0, 2] \cap V \neq \emptyset$ podemos tomar, o conxunto aberto $U = (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$, con $\varepsilon \in (0, p)$, para o que se cumpre que $p \in U$ e $F(x) = [0, 2] \cap V \neq \emptyset$ para cada $x \in U$.

Se $p = 0$ entón $F(0) = [0, 1]$. Logo se V é un subconxunto aberto de $\mathbb{R}$ tal que $F(0) \cap V \neq \emptyset$ podemos escoller o conxunto aberto $U = (-\varepsilon, \varepsilon)$, con $\varepsilon > 0$. Claramente $0 \in U$ e, ademais, tense que $F(x) = [0, 1] \cap V \neq \emptyset$ se $x \in (-\varepsilon, 0]$, e que $F(x) = [0, 2] \cap V \neq \emptyset$ se $x \in (0, \varepsilon)$.

Nótese que a aplicación F que vimos no Exemplo 1.2 non é semicontinua inferiormente, pois non cumpre a definición na orixe.

Por outro lado, a función F do Exemplo 1.21 non é semicontinua superiormente en 0, pois $F(0) \subset (-1/2, 3/2)$, pero non existe $\delta > 0$ tal que $F((-\delta, \delta)) \subset (-1/2, 3/2)$, xa que $2 \in F(x)$ para calquera $x > 0$.

Polo tanto ambas nocións de continuidade (a semicontinuidade superior e a inferior) son independentes.

En termos de sucesións, a semicontinuidade inferior pódese caracterizar do seguinte xeito.

Proposición 1.22. *A aplicación $\varphi : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ é semicontinua inferiormente en x_0 se e só se para cada sucesión $x_n \longrightarrow x_0$ e todo subconxunto aberto $V \subset Y$ con $\varphi(x_0) \cap V \neq \emptyset$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi(x_n) \cap V \neq \emptyset$, para todo $n \geq n_0$.*

Demostración. Supoñamos que φ é semicontinua inferiormente en x_0 e sexan $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \longrightarrow x_0$, e $V \subset Y$ aberto tal que $\varphi(x_0) \cap V \neq \emptyset$. Por ser φ semicontinua inferiormente en x_0, existe $\delta > 0$ tal que $\varphi(x) \cap V \neq \emptyset$ para todo $x \in B(x_0, \delta)$. Ao ser $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converxente a x_0, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B(x_0, \delta)$ para todo $n \geq n_0$ e, polo tanto,

$$\varphi(x_n) \cap V \neq \emptyset$$

para todo $n \geq n_0$.

Para probar o recíproco farémolo por redución ó absurdo. Supoñamos que φ non é semicontinua inferiormente en x_0. Entón existe un aberto $V \subset Y$ tal que $V \cap \varphi(x_0) \neq \emptyset$ e para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in B(x_0, 1/n)$ tal que $V \cap \varphi(x_n) = \emptyset$. Polo tanto, temos unha sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \longrightarrow x_0$ tal que $\varphi(x_n) \cap V = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o que supón unha contradición coa hipótese. $\square$

Observación 1.23. En base á Proposición 1.22, para probar que unha aplicación multivaluada φ non é semicontinua inferiormente nun punto x_0 basta atopar unha sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converxente a x_0 e un aberto V tal que $\varphi(x_0) \cap V \neq \emptyset$ e $\varphi(x_n) \cap V = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

No caso particular da función do Exemplo 1.2 temos que F non é semicontinua inferiormente en 0 xa que $\{-1/n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converxe a 0, $F(0) \cap (3/2, 2) \neq \emptyset$ e $F(-1/n) \cap (3/2, 2) = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Unha definición equivalente á de semicontinuidade inferior é a seguinte:

Definición 1.24. A aplicación $\varphi : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ é semicontinua inferiormente se e só se para cada aberto $U \subset Y$, o conxunto $\varphi_+^{-1}(U)$ é aberto en X.

Tamén se pode caracterizar en termos de conxuntos pechados do seguinte xeito:

Proposición 1.25. *A aplicación $\varphi : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ é semicontinua inferiormente se e só se para cada pechado $B \subset Y$, o conxunto $\varphi^{-1}(B)$ é un subconxunto pechado de X.*

Demostración. Sexa $B \subset Y$ pechado, entón

$$X\backslash\varphi^{-1}(B) = \{x \in X \mid \varphi(x) \not\subset B\} = \{x \in X \mid \varphi(x) \cap (Y\backslash B) \neq \emptyset\} = \varphi_+^{-1}(Y\backslash B)$$

é aberto en X (xa que $Y\backslash B$ é aberto e φ semicontinua inferiormente). Polo tanto, $\varphi^{-1}(B)$ é pechado en X.

Probemos agora que φ é semicontinua inferiormente se para cada conxunto pechado B, o conxunto $\varphi^{-1}(B)$ é pechado. Sexa $V \subset Y$ aberto, temos que ver que $\varphi_+^{-1}(V)$ é aberto en X. Temos que $Y\backslash V$ é pechado, así que $\varphi^{-1}(Y\backslash V)$ é pechado por hipótese. Ademais, $X\backslash\varphi^{-1}(Y\backslash V) = \varphi_+^{-1}(Y\backslash(Y\backslash V)) = \varphi_+^{-1}(V)$ é aberto en X. En conclusión, φ é semicontinua inferiormente. □

De aquí en adiante, diremos que unha aplicación multivaluada $\varphi : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ é continua se é semicontinua superior e inferiormente. Nótese que para aplicacións univaluadas $f : X \longrightarrow Y$ a semicontinuidade inferior coincide coa superior e isto non é máis que a continuidade de f.

Proposición 1.26. *A aplicación multivaluada $\varphi : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ é semicontinua inferiormente nun punto $x_0 \in X$ se, e só se, para cada sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ converxente a x_0, e para cada $y \in \varphi(x_0)$, existe unha sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$, $y_n \in \varphi(x_n)$ tal que y_n converxe a y.*

Demostración. Sexa $x_0 \in X$ e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ unha sucesión converxente a x_0. Supoñamos que existe $y_0 \in \varphi(x_0)$ tal que para calquera sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ cumprindo que $y_n \in \varphi(x_n)$ se ten que $y_n \not\to y_0$. É dicir, para calquera $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ con $y_n \in \varphi(x_n)$ existe $\varepsilon > 0$ e $N \in \mathbb{N}$ tal que $y_n \notin B(y_0, \varepsilon)$ para todo $n \geq N$. Polo tanto, $\varphi(x_n) \cap B(y_0, \varepsilon) = \emptyset$ para todo $n \geq N$, que pola Proposición 1.22 implica que φ non é semicontinua inferiormente en x_0, o cal é unha contradición.

Pola contra, sexan $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ unha sucesión converxente a x_0 e $V \subset Y$ un subconxunto aberto tal que $\varphi(x_0) \cap V \neq \emptyset$. Entón existe $y_0 \in \varphi(x_0) \cap V$ e, por hipótese, existe unha sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ tal que $y_n \in \varphi(x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n\to\infty} y_n = y_0$. Como $y_0 \in V$ e V é aberto, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $y_n \in V$ para todo $n \geq N$, o que implica que $\varphi(x_n) \cap V \neq \emptyset$ para todo $n \geq N$, o cal en virtude da Proposición 1.22 completa a proba. □

No relativo á composición de aplicacións veremos que, ao igual que coa semicontinuidade superior, a composición de aplicacións semicontinuas inferiormente é semicontinua inferiormente.

Proposición 1.27. *Se $\varphi : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ e $\psi : Y \longrightarrow \mathcal{P}(Z)$ son dúas aplicacións semicontinuas inferiormente, entón a composición $\psi \circ \varphi : X \longrightarrow \mathcal{P}(Z)$ tamén é semicontinua inferiormente.*

Demostración. Dado $x_0 \in X$ arbitrario e $U \subset Z$ aberto con $U \cap (\psi \circ \varphi)(x_0) \neq \emptyset$, temos que ver que existe $W \subset X$ aberto con $x_0 \in W$ tal que $U \cap (\psi \circ \varphi)(x) \neq \emptyset$ para todo $x \in W$.

Por ser ψ semicontinua inferiormente en $\varphi(x_0)$, para cada $y \in \varphi(x_0)$ existe un aberto $V_y \subset Y$ con $y \in V_y$ tal que $U \cap \psi(y) \neq \emptyset$ para todo $y \in V_y$.

Como φ é semicontinua inferiormente en x_0 existe $W \subset X$ aberto con $x_0 \in W$ tal que $\bigcup_{y \in \varphi(x_0)} V_y \cap \varphi(x) \neq \emptyset$ para todo $x \in W$.

Temos así que $\psi(\bigcup_{y \in \varphi(x_0)} V_y) \cap (\psi \circ \varphi)(x) \neq \emptyset$ ou equivalentemente

$$\bigcup_{y \in \varphi(x_0)} (\psi(V_y)) \cap (\psi \circ \varphi)(x) \neq \emptyset,$$

do que se deduce usando o anterior que $U \cap (\psi \circ \varphi)(x) \neq \emptyset$ para todo $x \in W$. □

Agora imos ver un resultado que nos será de utilidade nun capítulo posterior. A demostración imos omitila pois carece de interese neste caso, non obstante pode consultarse na referencia [5].

Proposición 1.28. *Sexa $\varphi : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ unha aplicación semicontinua inferiormente $f : X \longrightarrow Y$, $\lambda : X \longrightarrow (0, \infty)$ aplicacións continuas. Supoñamos ademais que para cada $x \in X$, temos que:*

$$\varphi(x) \cap B(f(x), \lambda(x)) \neq \emptyset.$$

Entón a aplicación $\psi : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ definida por

$$\psi(x) = \overline{\varphi(x) \cap B(f(x), \lambda(x))}$$

é semicontinua inferiormente.

A continuación imos ver outra noción de semicontinuidade inferior para aplicacións multivaluadas en termos de $\varepsilon - \delta$.

Definición 1.29. Sexa $\varphi : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ unha aplicación multivaluada. Dicimos que φ é $\varepsilon - \delta$ semicontinua inferiormente nun punto $x_0 \in X$ se para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\varphi(x_0) \subset B(\varphi(x), \varepsilon)$ para todo $x \in B(x_0, \delta)$.

O seguinte resultado relaciona ambos conceptos.

Proposición 1.30. *Sexa $\varphi : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ unha aplicación multivaluada $\varepsilon-\delta$ semicontinua inferiormente en x_0. Entón φ é semicontinua inferiormente en x_0.*

Demostración. Sexan $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ unha sucesión converxente a x_0 e $V \subset Y$ un aberto tal que $\varphi(x_0) \cap V \neq \emptyset$. Vexamos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi(x_n) \cap V \neq \emptyset$ para todo $n \geq n_0$, o que grazas á Proposición 1.22, implica que φ é semicontinua inferiormente en x_0.

Sexa $y \in \varphi(x_0) \cap V$. Por ser V aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(y, \varepsilon) \subset V$. Por outro lado, como φ é $\varepsilon - \delta$ semicontinua inferiormente en x_0, existen $\delta > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que para $n \geq n_0$ se ten que $x_n \in B(x_0, \delta)$ e $\varphi(x_0) \subset B(\varphi(x_n), \varepsilon)$. Deste xeito, $y \in B(\varphi(x_n), \varepsilon)$ para todo $n \geq n_0$, é dicir, para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, existe $z_n \in \varphi(x_n)$ con $d(z_n, y) < \varepsilon$, o que implica que $z_n \in \varphi(x_n) \cap B(y, \varepsilon) \subset \varphi(x_n) \cap V$, co cal queda probado que $\varphi(x_n) \cap V \neq \emptyset$ para todo $n \geq n_0$. □

Observación 1.31. O recíproco da proposición anterior non é certo. Consideremos a aplicación multivaluada $\varphi : [0, 1] \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ definida por:

$$\varphi(t) = \{(x, tx) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}.$$

Dados $t_0 \in [0, 1]$ e $V \subset \mathbb{R}^2$ un subconxunto aberto tal que $\varphi(t_0) \cap V \neq \emptyset$. Vemos que existe $\delta > 0$ tal que $\varphi(t) \cap V \neq \emptyset$ para todo $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, ver Figura 1.1. Polo tanto, φ é semicontinua inferiormente.

Pola contra, φ non é $\varepsilon-\delta$ semicontinua inferiormente en t_0, ver Figura 1.2, xa que para $\varepsilon = 1/2$ e $\delta > 0$ arbitrario, existe $t_\delta \in (t_0, t_0 + \delta)$ e $x_\delta = \frac{1}{t_\delta - t_0}$ tal que

$$d((x_\delta, t_0 x_\delta), \varphi(t_\delta)) > \frac{1}{2}.$$

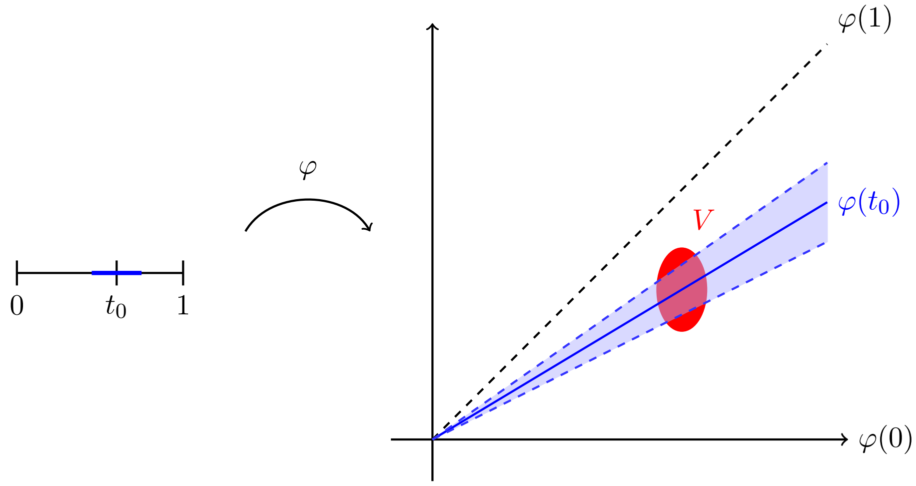

Figura 1.1: φ é semicontinua inferiormente

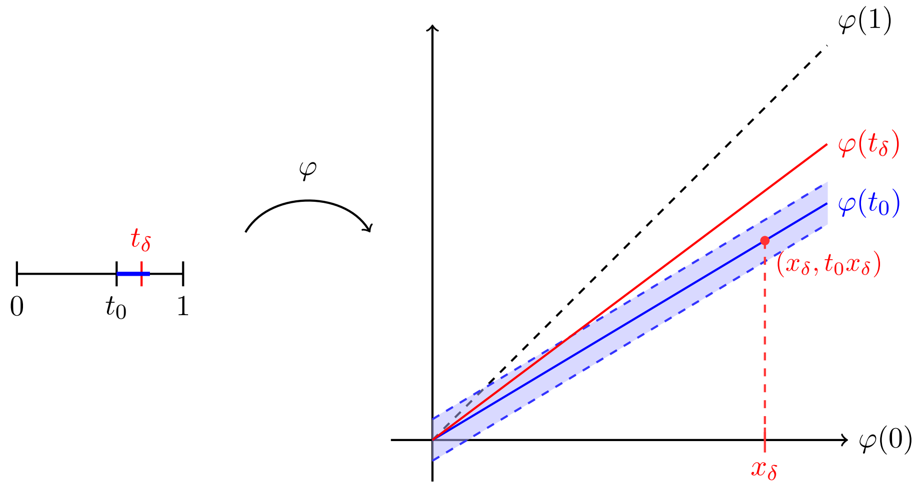

Figura 1.2: φ non é $\varepsilon - \delta$ semicontinua inferiormente

Capítulo 2

Teoremas de punto fixo

Neste capítulo veremos algúns resultados interesantes como poden ser o Teorema de Schauder e o de Cellina, que nos conducirán ó principal teorema de punto fixo para aplicacións multivaluadas, o coñecido Teorema de Kakutani, que é un caso particular do Teorema Bohnenblust-Karlin. Para rematar veremos unha xeneralización do Teorema de punto fixo de Banach.

2.1. Teorema de punto fixo de Kakutani

Comezamos esta sección con algúns conceptos e resultados que nos permitirán máis adiante probar o Teorema de punto fixo de Kakutani.

Definición 2.1. Sexan X e Y dous espazos normados e $F : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ unha aplicación multivaluada tal que $F(x)$ é un subconxunto compacto de Y para todo $x \in X$, $Z \subset X$ e $\varepsilon > 0$. Unha aplicación $f : Z \subset X \longrightarrow Y$ dise que é unha ε-aproximación (do grafo) de F se $\mathcal{G}r(f) \subset B(\mathcal{G}r(F), \varepsilon)$.

A continuación presentamos o Teorema de Schauder, o cal estende o coñecido Teorema de punto fixo de Brouwer a espazos de Banach, que nos será de axuda para a demostración do Teorema Bohnenblust-Karlin que veremos a continuación.

Teorema 2.2 (Schauder). *Sexa K un subconxunto non baleiro, compacto e convexo dun espazo normado X. Sexa $F : K \longrightarrow K$ continua. Entón F ten un punto fixo en K, é dicir, existe $x_0 \in K$ tal que $x_0 = F(x_0)$.*

Teorema 2.3 (Brouwer). *Sexa X un espazo normado finito, $C \subset X$ un subconxunto non baleiro, convexo, pechado e limitado, e $f : C \longrightarrow C$ unha aplicación continua. Entón f ten polo menos un punto fixo.*

A continuación veremos unhas definicións que nos servirán de axuda para a demostración dun resultado posterior.

Definición 2.4. Sexa X un espazo topolóxico e sexa $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ unha aplicación, chamaremos soporte de f, $\mathrm{Sop}(f)$, á adherencia do conxunto de puntos $x \in X$ tal que $f(x) \neq 0$.

Definición 2.5. Sexa X un espazo topolóxico e $\{f_i\}_{i\in I}$ unha familia de aplicacións continuas de X en $\mathbb{R}$. Diremos que $\{f_i\}_{i\in I}$ é unha partición da unidade se satisface as seguintes condicións:

i) f_i é non negativa para cada $i \in I$.

ii) O soporte de $\{f_i\}_{i\in I}$, $\{\mathrm{Sop}(f_i)\}_{i\in I}$, é unha familia localmente finita en X.

iii)$\sum_{i\in I} f_i = 1$.

Diremos que $\{f_i\}_{i\in I}$ está subordinada a unha familia $\{M_i\}_{i\in I}$ de subconxuntos de X se $\mathrm{Sop}(f_i) \subseteq M_i$ para cada $i \in I$.

Observación 2.6. Se $\{f_i\}_{i\in I}$ é unha partición da unidade de X entón pola condición iii) da Definición 2.5, $\{\mathrm{Sop}(f_i)\}_{i\in I}$ é un recubrimento de X localmente finito.

A continuación presentamos un teorema que nos será de utilidade para a demostración do Teorema de Cellina que veremos máis tarde. A súa proba pode atoparse en [1].

Teorema 2.7. *Sexa X un espazo normado. Para calquera cobertura aberta e finita $(\Omega_i)_{i\in I}$ de X, podemos asociar unha partición localmente lipchiciana da unidade subordinada a ela.*

De agora en adiante, empregaremos a notación conv(A) para referirnos á envoltura convexa do conxunto A, isto é, o menor subconxunto convexo de X que contén a A. Ademais, $\overline{\mathrm{conv}}(A)$ denotará a envoltura pechada e convexa do conxunto A, é dicir o menor subconxunto pechado e convexo que contén a A.

Para o seguinte resultado usamos principalmente a referencia [11].

Teorema 2.8 (Cellina)**.** *Sexan X e Y dous espazos normados e $\varphi : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ unha aplicación multivaluada semicontinua superiormente con valores convexos e pechados. Entón, para cada $\varepsilon > 0$, existe unha aplicación continua $f_\varepsilon : X \longrightarrow \mathrm{conv}(\varphi(X))$ tal que, para cada $x \in X$, existen $y \in X$ e $z \in \varphi(y)$ tales que $d(x, y) < \varepsilon$ e $||f_\varepsilon(x) - z|| < \varepsilon$.*

Demostración. Pola Proposición 1.10, para cada $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, existe $\delta_x > 0$ tal que $\varphi(B(x, \delta_x)) \subset B(\varphi(x), \varepsilon)$. Supoñamos que $\delta_x < \varepsilon$. Sexa $\{U_i\}_{i\in I}$ un refinamento aberto localmente finito de $\{B(x, \delta_x/2) \,|\, x \in X\}$ e $\{\phi_i\}_{i\in I}$ unha partición da unidade subordinada á familia de conxuntos $\{U_i\}_{i\in I}$, que existe en base ó Teorema 2.7.

Definimos a aplicación $f_\varepsilon : X \longrightarrow Y$ como:

$$f_\varepsilon(x) = \sum_{i\in I} \phi_i(x) y_i,$$

para todo $x \in X$, onde $U_i \subset B(x_i, \delta_{x_i}/2)$ e $y_i \in \varphi(x_i)$. Nótese que a aplicación

$$f_\varepsilon : X \longrightarrow \operatorname{conv}(\varphi(X))$$

é continua. Dado $x \in X$, sexa $I_0 = \{i \in I \,|\, \phi_i(x) \neq 0\}$. Entón existe $i_0 \in I_0$, tal que $\delta_{x_{i_0}} = \text{máx}_{i\in I_0} \delta_{x_i}$. Tomamos $y = x_{i_0}$. Para $i \in I_0$, temos que $x \in U_i \subset B(x_i, \delta_{x_i}/2)$ e polo tanto $x_i \in B(x_{i_0}, \delta_{x_{i_0}})$. Ademais, $f_\varepsilon(x) = \sum_{i\in I_0} \phi_i(x) y_i \in B(\varphi(y), \varepsilon)$, xa que $y_i \in \varphi(x_i) \subset \varphi(B(x_{i_0}, \delta_{x_{i_0}})) \subset B(\varphi(x_{i_0}), \varepsilon) = B(\varphi(y), \varepsilon)$ e $B(\varphi(y), \varepsilon)$ é un conxunto convexo por selo $\varphi(y)$. Se tomamos $z \in \varphi(y)$ tal que $||f_\varepsilon(x) - z|| < \varepsilon$ completamos a proba. □

Agora xa estamos en posición de probar o Teorema Bohnenblust-Karlin.

Teorema 2.9 (Bohnenblust-Karlin). *Sexa K un subcoxunto non baleiro, convexo e compacto dun espazo normado X e sexa $F : K \longrightarrow \mathcal{P}(K)$ unha aplicación semicontinua superiormente tal que $F(x)$ é un subconxunto de K compacto e convexo para cada $x \in K$. Entón F ten un punto fixo, é dicir, existe $x_0 \in K$ tal que $x_0 \in F(x_0)$.*

Demostración. Sexa $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ unha sucesión de aplicacións continuas en K, tal que $\mathcal{G}r(f_n) \subset B(\mathcal{G}r(F), 1/n)$, é dicir as f_n son $1/n$-aproximacións do grafo de F, cuxa existencia está asegurada polo Teorema de Cellina 2.8.

Polo Teorema 2.2 existen $x_n \in K$ tal que $x_n = f_n(x_n)$. Como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ e K é compacto, a sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ten unha subsucesión converxente a $x_0 \in K$. Polo tanto $d((x_0, x_0), \mathcal{G}r(F)) = \lim\limits_{n\to\infty} d((x_n, f_n(x_n)), \mathcal{G}r(F)) = 0$. Como F é semicontinua superiormente e $F(x)$ é compacto para todo $x \in K$, a Proposición 1.16 garante que $\mathcal{G}r(F)$ é pechado e (x_0, x_0) pertence ó $\mathcal{G}r(F)$, é dicir, $x_0 \in F(x_0)$. □

A continuación presentamos o Teorema de Kakutani, que é un caso particular do Teorema 2.9.

Teorema 2.10 (Kakutani). *Sexa K un subconxunto non baleiro, convexo e compacto de $\mathbb{R}^n$ e sexa $F : K \longrightarrow \mathcal{P}(K)$ unha aplicación semicontinua superiormente tal que $F(x)$ é un subconxunto de K compacto e convexo para cada $x \in K$. Entón F ten un punto fixo, é dicir, existe $x_0 \in K$ tal que $x_0 \in F(x_0)$.*

Observación 2.11. Nótese que o Teorema 2.9 é unha xeneralización do Teorema 2.2, pois no caso de aplicacións univaluadas a continuidade equivale á semicontinuidade superior.

Observación 2.12. O Teorema 2.9 deixa de ser certo se cambiamos K compacto por K pechado e limitado xa que en $\mathbb{R}^n$ compacto equivale a pechado e limitado, mentres que nun espazo normado X de dimensión infinita non é certo.

Vexamos un exemplo:

Exemplo 2.13. Sexa $X = l_2 = \{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \mid \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n^2 < \infty\}$ o espazo de sucesións cuxa suma ó cadrado é finita, con norma $||x|| = \big(\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n^2\big)^{1/2}$.

Se B é a bóla unidade pechada en X, entón definimos a aplicación $f : B \longrightarrow B$ como

$$f(x) = \big(\sqrt{1-||x||^2}, x_1, x_2, ...\big).$$

A función f é continua pero non ten puntos fixos pois do contrario existiría $x \in X$ tal que $x = f(x)$; polo tanto $||x|| = ||f(x)|| = 1$, $x_1 = \sqrt{1-||x||^2} = 0$, e $x_2 = x_1 = \cdots = 0$, o que contradí o feito de que $||x|| = 1$.

Deducimos que en espazos normados de dimensión infinita a continuidade das aplicacións non é suficiente para obter teoremas de punto fixo. Precisamos condicións máis fortes, como que o rango sexa compacto.

O Teorema 2.9 deixa de ser certo se cambiamos a condición convexo por conexo en K.

Exemplo 2.14. Sexa $\mathbb{S}^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ a circunferencia unidade en $\mathbb{R}^2$. Consideremos a función $f : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ definida por $f(x,y) = (-x,-y)$, que leva cada punto da circunferencia no seu oposto. É fácil ver que a función f non ten puntos fixos, pois se $f(x,y) = (x,y)$, entón $(x,y) = (0,0)$, que non é un punto de $\mathbb{S}^1$.

O Teorema 2.9 tamén deixa de ser certo se suprimimos a condición "$F(x)$ é un subconxunto convexo de K", como mostra o seguinte exemplo:

Exemplo 2.15. Consideremos a aplicación $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ definida como:

$$f(x) = \begin{cases} 3/4, & \text{se} \quad 0 \le x < 1/2, \\ \{3/4, 1/4\}, & \text{se} \quad x = 1/2, \\ 1/4, & \text{se} \quad 1/2 < x \le 1. \end{cases}$$

f é semicontinua superiormente xa que para cada pechado $B \subset [0,1]$, o conxunto $f_+^{-1}(B)$ é pechado en $[0,1]$. Nótese que un punto sempre é pechado. A función non ten puntos fixos xa que non é convexa en $x = 1/2$.

O seguinte resultado é a versión multivaluada do teorema da alternativa de Leray-Schauder. Para a súa aplicación non é preciso determinar un conxunto K que permaneza invariante pola aplicación F, como ocorría no Teorema de Bohnenblust-Karlin.

No seu enunciado aparece o concepto de conxunto relativamente compacto. Dise que A é un conxunto relativamente compacto se a súa clausura, $\overline{A}$, é un conxunto compacto.

Teorema 2.16. *Sexa X un espazo linear normado, $F : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ unha aplicación multivaluada semicontinua superiormente con valores convexos e compactos e que leva conxuntos limitados en conxuntos relativamente compactos. Supoñamos que existe $r > 0$ tal que*

$$x \in \lambda F(x) \ \text{ e } \ 0 \leq \lambda \leq 1 \Rightarrow \ ||x|| \leq r.$$

Entón F ten un punto fixo na bóla $\overline{B}(0, r)$.

Demostración. Sexa $M = \{x \in X \mid x \in \lambda F(x), \lambda \in (0, 1)\}$; entón M é un conxunto limitado en X. Polo tanto, existe $r_* > 0$ tal que

$$F(M) \subset \overline{B}(0, r_*) = \{x \in X \mid ||x|| \leq r_*\}.$$

Sexa $K = \sup\{||y|| \mid y \in F(\overline{B}(0, 2r_*))\}$, e $k = \text{máx}(K, 2r_* + 1)$ e consideremos o operador multivaluado $G : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ definido por:

$$G(x) = \begin{cases} F(x) \cap \overline{B}(0, 2r_*), & \text{se} \quad F(x) \cap \overline{B}(0, 2r_*) \neq \emptyset, \\ \frac{2r_*}{k} F(x), & \text{se} \quad F(x) \cap \overline{B}(0, 2r_*) = \emptyset. \end{cases}$$

Podemos probar que $G(\overline{B}(0, 2r_*)) \subset \overline{B}(0, 2r_*)$, $G(\cdot) \in \mathcal{P}(\overline{B}(0, 2r_*))$ con valores compactos e convexos e ademais G é semicontinua superiormente, por selo F. Como $G(\overline{B}(0, 2r_*))$ é relativamente compacto, o Lema de Mazur, (ver Theorem A.45 en [5]), asegura que $K = \overline{\text{conv}} G(\overline{B}(0, 2r_*))$ é compacto.

Ademais, como $\overline{B}(0, 2r_*)$ é pechada e convexa e $G(\overline{B}(0, 2r_*)) \subset \overline{B}(0, 2r_*)$ séguese da definición da envoltura pechada e convexa que $K \subset \overline{B}(0, 2r_*)$. Entón polo Teorema 2.9, existe $x_* \in K \subset \overline{B}(0, 2r_*)$ tal que $x_* \in G(x_*)$. Supoñamos que $x_* \in \frac{2r}{k} F(x_*)$ con $F(x_*) \cap \overline{B}(0, 2r_*) = \emptyset$; entón existe $y_* \in F(x_*)$ tal que

$$x_* = \frac{2r_*}{k} y_* \Rightarrow y_* = \frac{k}{2r_*} x_* \Rightarrow 2r_* < ||y_*|| \leq k \Rightarrow \frac{2r_*}{k} < 1.$$

Entón $x_* \in M \Rightarrow y_* \in F(M) \Rightarrow ||y_*|| \leq r_* \Rightarrow 2r_* < r_*$. Isto é unha contradición con $F(x_*) \cap \overline{B}(0, 2r_*) = \emptyset$; polo tanto $x_* \in F(x_*)$ como queríamos probar. □

O teorema de punto fixo anterior compleméntase coa seguinte versión, que no caso univaluado, se coñece como Teorema de Schaefer.

Corolario 2.17. *Sexa X un espazo normado e $F : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ unha aplicación multivaluada con valores pechados e convexos, semicontinua superiormente e que leva conxuntos limitados en conxuntos relativamente compactos. Entón cúmprense algunha das seguintes condicións:*

a) F ten polo menos un punto fixo,

b) o conxunto $M = \{x \in X \mid x \in \lambda F(x), \ \lambda \in (0, 1)\}$ é non limitado.

2.2. Teoremas de punto fixo para aplicacións contractivas

A continuación presentamos unha xeneralización do Teorema de punto fixo de Banach. Comezaremos dando unhas definicións que nos serán de utilidade.

Definición 2.18. Sexa X un espazo métrico e $A, B \subset X$ dous subconxuntos. Definimos a distancia de A a B como:

$$H_d^*(A,B) = \sup\{d(a,B) \mid a \in A\}.$$

Definición 2.19. Defínese a distancia de Haussdorf entre dous conxuntos A e B como:

$$H_d(A,B) = \text{máx}\{H_d^*(A,B), H_d^*(B,A)\}.$$

Definición 2.20. Sexa X un espazo métrico. Unha aplicación F dise contractiva se existe $k \in [0,1)$ tal que para todo $x, y \in X$ con $x \neq y$ se ten que $H_d(Fx, Fy) \leq kd(x,y)$.

Teorema 2.21. *Sexa (X,d) un espazo métrico completo e $F : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ unha aplicación tal que $F(x)$ é un subconxunto pechado de X para todo $x \in X$ que ademais é unha contracción, entón o conxunto de puntos fixos de F, $\mathrm{Fix}(F)$, é distinto do baleiro.*

Demostración. Supoñamos que $H_d(F(x), F(y)) \leq kd(x,y)$ para cada $x, y \in X$, onde $k \in [0,1)$. Sexa $x \in X$ e

$$D(x) = \{y \in X \mid d(x,y) \leq d(x, F(x))\}.$$

Xa que $F(x)$ é pechado, entón

$$D(x) \cap F(x) \neq \emptyset.$$

Entón podemos seleccionar $x_1 \in F(x)$ tal que $d(x, x_1) \leq d(x, F(x))$. Se

$$D(x_1) = \{y \in X \mid d(y, x_1) \leq d(x_1, F(x_1))\},$$

entón podemos tomar $x_2 \in F(x_1)$; temos

$$d(x_1, x_2) \leq d(x_1, F(x_1)) \Rightarrow d(x_1, x_2) \leq H_d(F(x), F(x_1)).$$

Isto implica que $d(x_1, x_2) \leq kd(x, x_1) \leq kd(x, F(x))$. Continuando este proceso, podemos atopar unha sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq d(x_n, F(x_n)).$$

Resulta que

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq d(x_n, F(x_n)) \leq H_d(F(x_{n-1}), x_n) \leq kd(x_{n-1}, x_n) \leq k^n d(x, F(x)).$$

Entón, é fácil verificar que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é unha sucesión de Cauchy. Como X é completo, a sucesión é converxente. Sexa $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Entón temos que $\{x_n\} \to x_0$, $x_{n+1} \in F(x_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, e danse as seguintes estimacións:

$$0 \leq d(x_0, F(x_0)) \leq d(x_{n+1}, x_0) + d(x_{n+1}, F(x_0)) \leq d(x_{n+1}, x_0) + kd(x_n, x_0).$$

Tomando límites, cando n tende a infinito,temos que $d(x_0, F(x_0)) = 0$ e como $F(x_0)$ é pechado, por hipótese, conseguimos que $x_0 \in F(x_0)$, como queríamos probar. $\square$

Nótese que no Teorema 2.21 o espazo debe ser completo pois na demostración obtemos unha sucesión de Cauchy que precisamos que sexa converxente. Isto non é preciso nos teoremas de punto fixo anteriores enunciados para espazos normados, que non teñen que ser completos, é dicir, non é preciso que sexan espazos de Banach.

Podemos observar tamén que o Teorema 2.21 non garante a existencia dun único punto fixo. De feito, calquera aplicación multivaluada contractiva, posúe non necesariamente un único punto fixo. A continuación imos ver un exemplo.

Exemplo 2.22. Sexa $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ unha aplicación multivaluada definida por:

$$F(x) = A,$$

para cada $x \in \mathbb{R}$, onde $A \subset \mathbb{R}$ é un conxunto non baleiro. Entón F como aplicación constante é unha contración. Temos que

$$\mathrm{Fix}(F) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in F(x)\} = A.$$

Polo tanto, ó contrario do que ocorría coas aplicacións univaluadas, o conxunto $\mathrm{Fix}(F)$ da contracción F pode ter varios elementos.

Capítulo 3

Teoremas de selección

Neste capítulo veremos algúns dos teoremas de selección que son de gran interese para aplicacións semicontinuas inferiormente. Comezaremos con algunhas notacións e resultados necesarios nesta sección.

Definición 3.1. Un espazo de Banach é un espazo normado completo con respecto á norma asociada.

Definición 3.2. Dicimos que un espazo Hausdorff é paracompacto se cada cobertura aberta ten un refinamento aberto localmente finito.

Lema 3.3 (Teorema de Stone)**.** *Todo espazo métrico é paracompacto.*

A continuación enunciamos e probamos o resultado principal deste capítulo.

Teorema 3.4 (Selección de Michael)**.** *Sexan X un espazo métrico e Y un espazo de Banach. Sexa F unha aplicación semicontinua inferiormente definida de X nos subconxuntos pechados e convexos de Y. Entón existe $f : X \longrightarrow Y$ unha selección continua de F, é dicir, $f(x) \in F(x)$ para cada $x \in X$.*

Demostración. Paso 1. Comezaremos probando o seguinte: dada calquera aplicación semicontinua inferiormente, con valores convexos (non necesariamente pechados) $\phi : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ e $\varepsilon > 0$, existe unha aplicación continua $\varphi : X \longrightarrow Y$ tal que $d(\varphi(x), \phi(x)) \leq \varepsilon$, é dicir, $\varphi(x) \in B(\phi(x), \varepsilon)$, para cada $x \in X$. De feito, para cada $x \in X$, sexan $y_x \in \phi(x)$ e $\delta_x > 0$ tal que $B(y_x, \varepsilon) \cap \phi(x') \neq \emptyset$, para $x' \in B(x, \delta_x)$. Xa que X é un espazo métrico, é paracompacto polo Lema 3.3. Polo tanto, existe un refinamento localmente finito $\{U_x\}_{x \in X}$ de $\{B(x, \delta_x)\}_{x \in X}$. Sexa $\{L_x\}_{x \in X}$ unha partición da unidade subordinada a $\{U_x\}_{x \in X}$. A aplicación $\varphi : X \longrightarrow Y$ definida como:

$$\varphi(u) = \sum_{x \in X} L_x(u) \cdot y_x$$

é continua por ser localmente unha suma finita de funcións continuas. Ahora fixamos $u \in X$. Cando $L_x(u) > 0$, $u \in B(x, \delta_x)$, entón $y_x \in B(\phi(u), \varepsilon)$. Se este último conxunto é convexo, calquera combinación convexa de tales $y's$ (en particular $\varphi(u)$) pertence a el.

Paso 2. Agora imos ver que podemos definir unha sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funcións continuas de X en Y coas seguintes propiedades:

$$d(f_n(u), F(u)) \leq \frac{1}{2^n}, \quad n = 1, 2, \dots, u \in X \tag{3.1}$$

$$||f_n(u) - f_{n-1}(u)|| \leq \frac{1}{2^{n-2}}, \ \ n = 2, 3, \dots, u \in X \tag{3.2}$$

Para $n = 1$ é suficiente tomar no paso anterior, $\phi = F$ e $\varepsilon = 1/2$. Supoñamos que temos definidas aplicacións f_n satisfacendo a propiedade (3.1) hasta $n = k$. Definiremos f_{k+1} verficando a propiedade (3.1) e a (3.2) como segue. Consideramos o conxunto $\phi(u) = B(f_k(u), 1/2^k) \cap F(u)$. Pola propiedade (3.1) é un conxunto convexo non baleiro. Pola Proposición 1.28 a aplicación ϕ é semicontinua inferiormente. Entón polo visto no Paso 1 existe unha función φ continua tal que

$$d(\varphi(x), \phi(x)) < \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Tomamos $f_{k+1} = \varphi$. Entón a distancia, $d(f_{k+1}(u), F(u)) < \frac{1}{2^{k+1}}$, probando así (3.1). Ademais,

$$f_{k+1}(u) \in B(\phi(u), 1/2^{k+1}) \subset B\left(f_k(u), \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}}\right),$$

é dicir,

$$||f_{k+1}(u) - f_k(u)|| \leq \frac{1}{2^{k-1}}$$

probando así (3.2).

Paso 3. Xa que a serie $\sum(1/2^n)$ converxe, $\{f_n\}$ é unha sucesión de Cauchy. Como Y é un espazo de Banach, é completo e, polo tanto, a sucesión $\{f_n\}$ converxe uniformemente a unha función continua f. Xa que os valores que toma F son pechados, por (3.1) f é unha selección continua de F. $\square$

A continuación imos ver algúns exemplos sobre a necesidade de certas condicións no Teorema de Selección de Michael.

No primeiro exemplo, veremos que non podemos cambiar a semicontinuidade inferior pola superior.

Exemplo 3.5. Sexa F unha aplicación multivaluada definida de $[0,2]$ nos subconxuntos compactos e convexos de $\mathbb{R}$ como:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x \in [0,1), \\ [0,1], & \text{se} \quad x = 1, \\ 1, & \text{se} \quad x \in (1,2]. \end{cases}$$

Claramente, o grafo de F é pechado e $F(A)$ é compacto para calquera subconxunto $A \subset [0,2]$, entón pola Proposición 1.19, F é semicontinua superiormente. Non obstante non ten ningunha selección continua, pois non podería ser continua en $x = 1$.

O seguinte exemplo mostra que o Teorema de Michael falla sen a hipótese de convexidade.

Exemplo 3.6. Sexa $\overline{B}(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid ||x||^2 = x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ o disco unidade pechado en $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{S}^1 = \partial\overline{B}(0,1)$, a súa fronteira, e sexa $F : \overline{B}(0,1) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ unha aplicación multivaluada con valores compactos definida por:

$$F(x) = \begin{cases} \mathbb{S}^1 \backslash \{\xi \mid ||\xi - x||x||^{-1}|| < ||x||\}, & \text{se} \quad x \neq 0, \\ \mathbb{S}^1, & \text{se} \quad x = 0. \end{cases}$$

F é semicontinua inferiormente en $\overline{B}(0,1)$, pero non admite unha selección continua. Supoñamos que F ten unha selección continua $f : \overline{B}(0,1) \longrightarrow \overline{B}(0,1)$. Entón polo Teorema 2.3 (Brouwer), existe $x_* \in \overline{B}(0,1)$ tal que $x_* = f(x_*)$. Se $x_* \in F(x_*)$ implica que $x_* \neq 0$, polo tanto como $F(x_*) \subset \mathbb{S}^1$ temos que

$$||x_* - x_*||x_*||^{-1}|| \geq ||x_*|| = 1 \Rightarrow 0 \geq 1,$$

o cal é unha contradición.

Para concluír este capítulo, mostramos como podemos aplicar o Teorema de selección de Michael para probar un resultado de extensión para funcións continuas.

Diremos que un espazo métrico E ten a propiedade de extensión se para calquera espazo métrico X, calquera subconxunto pechado $A \subset X$ e calquera aplicación continua $f : A \longrightarrow E$, existe unha extensión continua $\tilde{f} : X \longrightarrow E$ de f a X, é dicir, $\tilde{f}$ é continua e $\tilde{f}(x) = f(x)$ para todo $x \in A$.

Corolario 3.7. *Se E é un espazo de Banach, entón E ten a propiedade de extensión.*

Demostración. Sexa A un subconxunto pechado de X e $f : A \longrightarrow E$ unha aplicación continua. Definimos $\varphi : X \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ como:

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se} \quad x \in A, \\ \overline{\text{conv}}(f(A)), & \text{se} \quad x \notin A. \end{cases}$$

Entón φ é semicontinua inferiormente e ten valores convexos e pechados. Polo Teorema 3.4 φ posúe unha selección continua $\tilde{f}$. Ademais $\tilde{f}$ é unha extensión continua de f. $\square$

Capítulo 4

Aplicacións

Existe unha gran variedade de motivacións que levaron ós matemáticos a estudar sistemas dinámicos que teñen velocidades unicamente determinadas polo estado do sistema, en concreto para substituír ecuacións diferenciais

$$y' = f(y)$$

por inclusións diferenciais

$$y' \in F(y).$$

Un dos exemplos máis importantes de inclusións diferenciais provén da Teoría de Control. Filippov e Wazewski consideraron o seguinte sistema de control

$$y'(t) = f(y, u), \ u \in U,$$

onde u é un parámetro de control. Deduciron que o sistema de control e a inclusión diferencial

$$y' \in F(y, U) = \bigcup_{u \in U} f(y, u)$$

teñen as mesmas traxectorias. Se o conxunto de controis depende de y, isto é $U = U(y)$, entón obtemos a inclusión diferencial

$$y' \in F(y, U(y)).$$

A equivalencia entre un sistema de control e a correspondente inclusión diferencial é a idea que se usa principalmente para probar os teoremas de existencia na Teoría de Control. Dado que a dinámica económica, social e biolóxica dos macrosistemas é multivaluada, as inclusións diferenciais serven como modelos naturais. Ademais, todos os problemas considerados para ecuacións diferenciais como existencia de solucións, continuidade das solucións, dependencia das condicións iniciais e parámetros, están presentes tamén na teoría das inclusións diferenciais. Xa que unha inclusión diferencial xeralmente ten moitas solucións que comezan nun punto dado, aparecen novos problemas como a investigación das propiedades topolóxicas do conxunto de solucións, a selección de solucións con determinadas propiedades, a avaliación dos conxuntos de accesibilidade (teoría da viabilidade). Para resolver estes problemas, desenvolveronse numerosas técnicas matemáticas. Para saber máis ver [7] e [1].

Neste capítulo veremos unha serie de aplicacións das funcións multivaluadas. Comezaremos falando das inclusións diferenciais e veremos algúns teoremas de existencia segundo as características que poidan presentar as aplicacións e remataremos cuns resultados relacionados coa teoría de xogos.

4.1. Inclusións diferenciais

As inclusións diferencias son unha xeneralización das ecuacións diferenciais ordinarias da forma

$$x'(t) \in F(t, x(t)).$$

Definición 4.1. Dados a inclusión diferencial $x'(t) \in F(t, x(t))$ sendo $F : I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ unha aplicación multivaluada e un punto $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é un intervalo compacto, o problema de Cauchy consiste en atopar unha función $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ solución da inclusión

$$\varphi'(t) \in F(t, \varphi(t)) \text{ tal que } \varphi(t_0) = x_0. \tag{4.1}$$

O enfoque máis simple do problema de existencia dunha inclusión diferencial consistiría en reducilo ó correspondente problema dunha ecuación diferencial ordinaria (EDO).

Para comezar, gustaríanos saber se existe tal ecuación diferencial, é dicir, se existe unha función $f(t, \cdot)$ tal que para cada x no dominio, $f(t, x) \in F(t, x)$. Se iso fose así, cada solución de $x'(t) = f(t, x(t))$, sería solución de $x'(t) \in F(t, x(t))$.

Para poder proceder deste xeito necesitamos ser capaces de extraer unha selección f de F que teña boas propiedades, para poder garantir que a EDO correspondente ten solución.

Bastaría con que a función f fose continua para poder aplicar logo o Teorema de Peano. Isto é posible para certa clase de funcións multivaluadas semicontinuas inferiormente, como veremos no Caso 2.

No caso das inclusións diferenciais, sempre imos atopar unha dificultade que non aparecía nas EDO's, con f continua, onde a converxencia das solucións aproximadas implica a converxencia das derivadas das solucións aproximadas.

De agora en adiante consideraremos inclusións diferenciais da forma

$$x'(t) \in F(t, x(t)), \quad x(0) = x_0, \tag{4.2}$$

onde as imaxes $F(t, x)$ da aplicación F son convexas.

4.1.1. Caso 1: Aplicacións semicontinuas superiormente con valores compactos e convexos

Comezamos recordando o Teorema de Peano para EDO's e unhas definicións básicas que nos serán de utilidade para o desenvolvemento desta parte.

Teorema 4.2 (Peano). *Sexa Ω un aberto de $\mathbb{R}^{n+1}$ e f a aplicación*

$$f : (t, x) \in \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to f(t, x) \in \mathbb{R}^n$$

e $x'(t) = f(t, x)$ a ecuación diferencial asociada. Se f é continua en Ω, entón, fixado un punto $(t_0, x_0) \in \Omega$, existe solución da ecuación pasando por (t_0, x_0), definida nun entorno de t_0.

Definición 4.3. Dicimos que unha aplicación ϕ é localmente compacta (localmente limitada) se para cada punto do dominio de ϕ, $\mathrm{Dom}(\phi)$, existe unha veciñanza que é mapeada nun subconxunto compacto (limitado).

Definición 4.4. Unha función $x : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dise absolutamente continua se para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para cada colección numerable de subintervalos disxuntos $[\alpha_k, \beta_k]$ de $[\alpha, \beta]$ tal que $\sum(\beta_k - \alpha_k) < \delta$, entón $\sum |x(\beta_k) - x(\alpha_k)| < \varepsilon$.

As funcións absolutamente continuas poden ser caracterizadas grazas ó seguinte teorema:

Teorema 4.5 (Teorema fundamental do cálculo). *A función $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é absolutamente continua se e só se é diferenciable en case todo punto, a súa derivada $f' \in L^1(I)$ e, para cada $t \in [a, b]$ tense que*

$$f(t) - f(a) = \int_a^t f'(s)ds.$$

A continuación presentamos un resultado sobre compacidade para funcións absolutamente continuas que nos será de utilidade para probar o principal resultado desta sección. A súa demostración pode atoparse en [1, Theorem 0.3.4].

Teorema 4.6. *Supoñamos que a sucesión de funcións absolutamente continuas $x_n : I \to \mathbb{R}^n$ (con I un intervalo compacto de $\mathbb{R}$) cumpre as seguintes condicións:*

(i) o conxunto $\{x_k(t) \mid k \in \mathbb{N}\}$ é limitado para todo $t \in I$;

(ii) existe unha función $\alpha : I \to \mathbb{R}$, $\alpha \in L^1(I)$, tal que

$$\left\|x_k'(t)\right\| \leq \alpha(t) \quad \textit{para case todo punto (c.t.p.) } t \in I \textit{ e todo } k \in \mathbb{N}.$$

Entón existe unha subsucesión (que denotamos do mesmo xeito) $\{x_k\}$ converxente a unha función absolutamente continua $x : I \to \mathbb{R}^n$ do seguinte xeito:

(I) $\{x_k\}$ converxe uniformemente a x;

(II) existe unha sucesión de combinacións lineares $y_m = \sum_{k=1}^m a_{m_k} x_k'$, con $a_{m_k} \geq 0$ para $k = 1, 2, \ldots, m$, e $\sum_{k=1}^m a_{m_k} = 1$, tal que y_m converxe a x' en $L^1(I)$.

Ademais, temos o seguinte resultado que relaciona a converxencia en L^1 coa converxencia puntual, ver [2].

Teorema 4.7. *Se unha sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funcións definidas no intervalo compacto I converxe en L^1 a y, entón existe unha subsucesión $\{y_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ que converxe puntualmente en case todo punto de I.*

Agora estamos en disposición de presentar un resultado de existencia para inclusións diferenciais na liña do Teorema de Peano. A proba presentada segue as ideas da primeira proba do [1, Theorem 2.1.3].

Teorema 4.8. *Sexa $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un subconxunto aberto contendo ao punto (t_0, x_0). Sexa $F : \Omega \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ unha aplicación multivaluada semicontinua superiormente tal que $F(t, x)$ é un subconxunto compacto e convexo de $\mathbb{R}^n$ para todo $(t, x) \in \Omega$. Entón existe $T > 0$ e unha función absolutamente continua $x(\cdot)$ definida en $[t_0, t_0 + T]$ que é unha solución local da inclusión diferencial*

$$x'(t) \in F(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0.$$

Demostración. Sexan $a, b > 0$ tales que $B := [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B}(x_0, b) \subset \Omega$. Como B é compacto en $\mathbb{R}^{n+1}$, pola Proposición 1.6, $F(B)$ é compacto en $\mathbb{R}^n$. En particular, $F(B)$ é un subconxunto limitado de $\mathbb{R}^n$, así que existe $M > 0$ tal que $\|y\| \leq M$ para todo $y \in F(B)$.

Sexa $T = \min\{a, b/M\}$ e probemos que existe unha solución da inclusión diferencial definida en $[t_0, t_0 + T]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos a aplicación continua $f_n : B \to \mathbb{R}^n$

proporcionada polo Teorema 2.8 (Cellina) de xeito tal que para cada $(t,x) \in B$ existen $(s,y) \in B$ e $z \in F(s,y)$ tales que

$$\|(t,x)-(s,y)\| < \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad \|f_n(t,x)-z\| < \frac{1}{n},$$

é dicir, f_n é unha $1/n$–aproximación do grafo de F.

Sexa $x_n : [t_0, t_0+T] \to \mathbb{R}^n$ a solución do problema

$$x_n'(t) = f_n(t, x_n(t)), \quad x_n(t_0) = x_0, \tag{4.3}$$

proporcionada polo Teorema de Peano. Cómpre remarcar que a función x_n está definida en $[t_0, t_0+T]$, xa que $f_n(B) \subset \operatorname{conv}(F(B)) \subset \overline{B}(0,M)$ e, polo tanto, as funcións f_n son continuas e limitadas en B.

Así, temos que $\|x_n'(t)\| \le M$ para todo $t \in [t_0, t_0+T]$. Deste xeito

$$\|x_n(t)\| = \left\| x_0 + \int_{t_0}^{t} x_n'(s)\,ds \right\| \le \|x_0\| + \int_{t_0}^{t} \left\|x_n'(s)\right\| \,ds \le \|x_0\| + M\,T.$$

A sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está nas hipóteses do Teorema 4.6, así que converxe uniformemente a unha función absolutamente continua x e, ademais, existe unha sucesión de combinacións lineares de x_n', y_m, que converxe a x' en L^1. Polo Teorema 4.7, a subsucesión $\{y_{m_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ converxe puntualmente a x' para c.t.p. $t \in [t_0, t_0+T]$.

Dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$((t, x_n(t)), x_n'(t)) \in B(\mathcal{G}r(F), \varepsilon) \quad \text{para todo } n \ge N.$$

Como $F(s,y)$ é convexo para todo $(s,y) \in \Omega$ e y_m está formada por combinacións lineares de x_n', obtemos que

$$((t, x_{m_j}(t)), y_{m_j}(t)) \in B(\mathcal{G}r(F), \varepsilon) \quad \text{para todo } j \ge N.$$

Tomando o límite temos que $((t,x(t)),x'(t)) \in B(\mathcal{G}r(F),\varepsilon)$ para c.t.p. $t \in [t_0, t_0+T]$. Pola Proposición 1.16, o grafo de F, $\mathcal{G}r(F)$, é un conxunto pechado. Como $\varepsilon > 0$ é arbitrario e $\mathcal{G}r(F)$ é pechado, entón $((t,x(t)),x'(t)) \in \mathcal{G}r(F)$ para c.t.p. $t \in [t_0, t_0+T]$, é dicir, $x'(t) \in F(t,x(t))$ para c.t.p. $t \in [t_0, t_0+T]$.

Finalmente, como x_n converxe uniformemente a x e $x_n(t_0) = x_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, concluimos que $x(t_0) = x_0$. $\square$

A proba anterior baséase en obter unha sucesión de solucións de problemas aproximados e extraer unha subsucesión converxente, cuxo límite é a solución da inclusión diferencial. Unha proba alternativa consiste en aplicar un teorema de punto fixo, como o Teorema de Bohnenblust–Karlin, ver a demostración do Teorema 2.28 de [5].

As solucións consideradas para inclusións diferenciais son funcións absolutamente continuas. Unha cuestión natural que se nos pode plantexar é a de se podemos asegurar a existencia de solucións máis regulares, por exemplo, de clase un, baixo as hipóteses do Teorema 4.8. Así e todo, o espazo de funcións continuamente diferenciables non é suficientemente grande para garantir a existencia de solucións, como mostra o seguinte exemplo.

Exemplo 4.9. Consideremos o problema de Cauchy

$$x'(t) \in F(x(t)) \quad t \in [0,T], \quad x(0) = x_0,$$

onde

$$F(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ [-1,1], & x = 0, \\ -1, & x > 0. \end{cases}$$

É fácil ver que F é unha aplicación multivaluada semicontinua superiormente tal que $F(x)$ é un conxunto compacto e convexo para todo $x \in \mathbb{R}$.

Por outro lado, o problema de Cauchy non ten ningunha solución de clase un se $x_0 \neq 0$ e $T > |x_0|$.

A inclusión diferencial pode non ter solución se $F(x)$ non é convexo para algún x. A continuación presentamos uns exemplos extraídos do libro [4].

Exemplo 4.10. Consideremos o problema de Cauchy

$$x'(t) \in F(x(t)), \quad x(0) = 0,$$

onde

$$F(x) = \begin{cases} -1, & x > 0, \\ \{-1,1\}, & x = 0, \\ 1, & x < 0. \end{cases}$$

Nótese que F é semicontinua superiormente, pero as solucións non acadan a condición inicial polo que $x = 0$ non é solución. Se facemos que F sexa convexa, é dicir, tomando $F(0) = [-1,1]$, hai unha única solución ($x = 0$) e esta solución é clase un, pero se cambiamos por $x_0 = 1$ entón a única solución vén dada por $x(t) = (1-t)\chi_{[0,1]}(t)$, que non é clase un en $[0,2]$. Nótese que $\chi_{[0,1]}$ denota a función característica, que se define do seguinte xeito:

$$\chi_{[0,1]}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x \in [0,1], \\ 0, & \text{se} \quad x \notin [0,1]. \end{cases}$$

Ademáis, en $\mathbb{R}$ a conexidade por camiños dos conxuntos $F(x)$ é igual á convexidade, suficiente para a existencia. Nun caso de dimensión superior isto non é certo. Vexamos o seguinte exemplo:

Exemplo 4.11. Consideremos o espazo $\mathbb{R}^2$, $x(0)=0$ e $F:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ definida como:

$$F(x) = \begin{cases} -x/||x||, & \text{se} \quad x \neq 0, \\ \partial B(0,1), & \text{se} \quad x = 0. \end{cases}$$

A función F é claramente continua para calquera $x \neq 0$. Vexamos, por definición, que F é semicontinua superiormente en 0. Sexa $V \subset \mathbb{R}^2$ un aberto tal que $F(0) \subset V$ e tomamos $U = B(0,1)$. Temos que $0 \in U$ e $F(U) = F(0) \subset V$, así que F é semicontinua superiormente en 0. Ademais, está claro que $F(x)$ é un subconxunto de $\mathbb{R}^2$ compacto e conexo por camiños para todo $x \in \mathbb{R}^2$. Porén, o problema de Cauchy

$$x'(t) \in F(x(t)),\ x(0)=0,$$

non ten solución. Vexamos que ningunha solución pode escapar da orixe, pois se $x(t)$ é unha solución que escapa da orixe e consideramos $y(t) = ||x(t)||^2$, temos que para case todo punto

$$y'(t) = 2x(t)x'(t) = 2x(t)\left(\frac{-x(t)}{||x(t)||}\right) = -2\frac{||x(t)||^2}{||x(t)||} = -2||x(t)|| = -2\sqrt{y(t)},$$

o que implica que $y=0$ xa que $y(t) = ||x(t)||^2 \geq 0$, así que $y'(t) = -2\sqrt{y(t)} \leq 0$ e, como $y(0)=0$, tense que $y=0$ por ser decrecente e, polo tanto, $x=0$. Por outro lado, $x=0$ non é solución do problema de Cauchy, concluíndo entón que este non ten ningunha solución.

4.1.2. Caso 2: Aplicacións semicontinuas inferiormente con valores convexos e pechados

Veremos que se F é unha aplicación semicontinua inferiormente, con valores convexos e pechados, o Teorema 3.4 garante a existencia de seleccións continuas, concluíndo así que o problema de Cauchy ten solución.

Teorema 4.12. *Sexa F unha aplicación semicontinua inferiormente definida dun conxunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ nos subconxuntos non baleiros, convexos e pechados de $\mathbb{R}^n$. Sexa $(t_0, x_0) \in \Omega$. Entón existen algúns intervalos $I = (w_-, w_+)$, con $w_- < t_0 < w_+$ e polo menos unha función continuamente diferenciable $x : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, que é a solución do problema de Cauchy para a inclusión diferencial $x'(t) \in F(t, x(t))$.*

Demostración. O conxunto Ω, un subconxunto aberto de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, é un espazo métrico, polo tanto paracompacto. Aplicando o Teorema 3.4 existe unha selección continua $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ de F. Ademáis, polo Teorema 4.2, o problema de Cauchy

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0$$

ten polo menos unha solución de clase un definida nun intervalo maximal de existencia. Claramente, dita solución tamén é solución da inclusión diferencial por ser f unha selección de F. □

Para finalizar esta sección remarquemos que o argumento empregado no Caso 2, moito máis simple que o do Caso 1, non é aplicable no primeiro caso estudado, pois como mostra o Exemplo 3.5 non sempre é posible extraer unha selección continua se a aplicación multivaluada é semicontinua superiormente. Ademais, a solución obtida neste caso é continuamente diferenciable, algo que non era posible garantir no Caso 1 como mostra o Exemplo 4.9.

4.2. Regularización de ecuacións diferenciais con descontinuidades

Para probar a existencia de solucións das ecuacións diferenciais

$$x'(t) = f(x(t)) \tag{4.4}$$

onde $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ non é continua, a forma máis sinxela é considerar a multifunción F máis pequena, semicontinua superiormente e convexa cuxo grafo conteña o grafo de f. Cando f é localmente limitada, F defínese como

$$F(x) = \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{\text{conv}}\, f(B(x,\varepsilon))$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e satisface:

1. para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) \in F(x)$;
2. a aplicación $x \to F(x)$ é semicontinua superiormente con valores convexos;
3. sempre que f sexa continua en x, $F(x) = \{f(x)\}$.

De feito, cada solución da ecuación (4.4) é unha solución da inclusión diferencial

$$x'(t) \in F(x(t)). \tag{4.5}$$

As solucións da inclusión diferencial (4.5) denomínanse solucións de Krasovskij. Facemos fincapé no feito de que sempre que f sexa continua en $x(t)$, entón a solución da inclusión diferencial (4.5) satisface a ecuación $x'(t) = f(x(t))$. Para obter este resultado, non precisamos que se verifique a propiedade 1 nos puntos onde f non é continua. Podemos centrarnos en aplicacións ϕ que satisfagan 2 e 3. Polo tanto as inclusións diferenciais

$x'(t) \in \phi(x(t))$ producen traxectorias $x(\cdot)$ que satisfacen a ecuación (4.4) sempre que f sexa continua en $x(t)$.

Cando f non é continua, os teoremas clásicos de existencia para EDO's, como o Teorema de Peano, non se poden aplicar. De feito, en xeral, o problema de Cauchy non ten solución. Por iso, se estudan as solucións dunha inclusión diferencial asociada coas propiedades xa mencionadas. Para máis información sobre este tema pode verse [8].

4.3. Teoría de xogos

Para o desenvolvemento desta parte usaremos principalmente as referencias [3] e [6].

Nash utiliza o Teorema de Kakutani para demostrar un resultado importante na teoría de xogos. O teorema implica a existencia dun equilibrio de Nash en cada xogo finito con estratexias mixtas para calquera número de xogadores. Neste caso S é o conxunto de tuplas de estratexias mixtas elixidas por cada xogador do xogo. A función $\varphi(x)$ dá unha nova tupla onde a estratexia de cada xogador é a súa mellor resposta ás estratexias dos outros xogadores. Dado que pode haber unha serie de respostas que sexan igual de boas, φ pode tomar máis dun valor. A continuación o equilibrio de Nash do xogo defínese como un punto fixo de φ, é dicir, unha tupla de estratexias onde a estratexia de cada xogador é unha mellor resposta ás estratexias dos outros xogadores. O Teorema de Kakutani asegura a existencia dese punto fixo.

Definición 4.13. Un xogo en forma estratéxica G con conxunto de xogadores $N = \{1, \dots, n\}$ é unha $2n$-tupla $G = (X_1, \dots, X_n, H_1, \dots, H_n)$, onde, para todo $i \in N$, X_i é o conxunto de estratexias do xogador i e $H_i : X = \prod_{i\in N} X_i \longrightarrow \mathbb{R}$ a súa función de pago, que asigna a cada perfil de estratexias $x \in X$ o pago que i obtén se xoga de acordo a tal perfil. En realidade, é un problema de decisión no que interaccionan os xogadores de N e están involucrados os seguintes elementos:

- $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, os conxuntos de estratexias dos xogadores.
- R, o conxunto de posibles resultados.
- Unha aplicación $f : X = \prod_{i\in N} X_i \longrightarrow \mathbb{R}$ que asigna a cada perfil de estratexias x o seu correspondente resultado $f(x)$.
- $\{\succeq_i\}_{i\in N}$, as preferencias dos xogadores sobre R (relacións binarias completas e transitivas).

A definición de xogo en forma estratéxica asume que as preferencias dos xogadores poden representarse a través de funcións de utilidade. Se para cada $i \in N$ denotamos por h_i a súa función de utilidade, a correspondente función de pago H_i vén dada, para todo perfil $x \in X$, $H_i(x) = h_i(f(x))$.

O concepto de solución máis importante para xogos en forma estratéxica é o equilibrio de Nash. A idea principal do equilibrio de Nash é facer unha importante simplificación e, en vez de preocuparse de como se desenvolvería a iteracción entre os xogadores, preguntarse cales serían os resultados estables de tal iteracción. De feito, un equilibrio de Nash dun xogo en forma estratéxica non é máis que un perfil de estratexias tal que ningún xogador gaña desviándose unilateralmente del. Pode dicirse que o concepto de equilibrio de Nash busca resultados estables da situación interactiva.

Definición 4.14. Sexa $G = (X_1, \dots, X_n, H_1, \dots, H_n)$ un xogo en forma estratéxica. Un equilibrio de Nash de G é un perfil de estratexias $x \in X$ que cumpre que

$$H_i(x) \geq H_i(x_{-i}, x'_i),$$

para todo $x'_i \in X_i$ e todo $i \in N$, onde o perfil (x_{-i}, x'_i) é:

$$(x_1, \dots, x_{i-1}, x'_i, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

A continuación imos presentar o Teorema de Nash, que dá unha condicición suficiente para a existencia de equilibrios de Nash nun xogo en forma estratéxica. Para enunciar e demostrar o Teorema de Nash debemos introducir algúns conceptos e resultados de análise de aplicacións multivaluadas.

Definición 4.15. Unha función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ dise cuasi-cóncava, se para todo $r \in \mathbb{R}$, o conxunto $\{x \in X \mid f(x) \geq r\}$ é convexo, ou equivalentemente, se para calquera $x, \widehat{x} \in X$ e para todo $\alpha \in [0,1]$ se ten que $f(\alpha x + (1-\alpha)\widehat{x}) \geq \text{mín}\{f(x), f(\widehat{x})\}$.

Teorema 4.16 (Nash)**.** *Sexa $G = (X_1, \dots, X_n, H_1, \dots, H_n)$ un xogo en forma estratéxica que cumpre as seguintes condicións para cada $i \in N$:*

1. X_i é un subconxunto de $\mathbb{R}^{mi}$ non baleiro, convexo e compacto.

2. H_i é continua.

3. Para todo $\overline{x}_{-i}$, a función de x_i dada por $H_i(\overline{x}_{-i}, x_i)$ é cuasi-cóncava en X_i.

Entón, G ten polo menos un equilibrio de Nash.

Demostración. Tomamos a aplicación multivaluada $B : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ dada por $B(x) = \prod_{i \in N} B_i(x_{-i})$ onde, para todo $i \in N$,

$$B_i(x_{-i}) = \{x'_i \mid H_i(x_{-i}, x'_i) \geq H_i(x_{-i}, \widehat{x}_i), \text{para todo } \widehat{x}_i \in X_i\},$$

é dicir, o conxunto de mellores respostas de i a x_{-i}. Vexamos que para cada $i \in N$, B_i cumpre as hipótesis do Teorema de punto fixo de Kakutani.

• É non baleira, isto é inmediato xa que toda función continua definida nun compacto alcanza o seu máximo.

• Toma valores pechados. Isto tense grazas á continuidade das funcións de pago e á compacidade dos conxuntos de estratexias.

• Toma valores convexos. Sexan $x_{-i} \in X_{-i}$ e $\widehat{x}_i \in B_i(x_{-i})$. Sexa $r = H_i(x_{-i}, \widehat{x}_i)$. Entón pódese escribir $B_i(x_{-i}) = \{x_i \in X_i \mid H_i(x_{-i}, x_i) \geq r\}$. Aplicando a cuasi-concavidade de H_i tense que B_i é convexa.

• É semicontinua superiormente. Faremos a demostración por redución ó absurdo. Supoñamos que B_i non é semicontinua superiormente, entón existe unha sucesión $\{x^k_{-i}\} \subset X_{-i}$ que converxe a $\overline{x}_{-i} \in X_{-i}$ e un aberto $B^* \subset X_i$ con $B_i(\overline{x}_{-i}) \subset B^*$ e cumprindo que para todo $k_0 \in \mathbb{N}$ existe $k \geq k_0$ tal que $B_i(x^k_{-i}) \not\subset B^*$. Isto implica que existe unha sucesión $\{\widehat{x}^m_i\} \subset X_i$ tal que, para todo $m \in \mathbb{N}$, $\widehat{x}^m_i \in B_i(x^m_{-i}) \backslash B^*$. Como X_i é compacto, $\{\widehat{x}^m_i\}$ ten unha subsucesión converxente. Supoñamos, sen pérdida de xeneralidade que $\{\widehat{x}^m_i\}$ converxe e sexa $x^0_i \in X_i$ o seu límite. Xa que B^* é un aberto, $X_i \backslash B^*$ é un pechado e por tanto $x^0_i \in X_i \backslash B^*$, polo que $x^0_i \notin B_i(\overline{x}_{-i})$ (xa que $B_i(\overline{x}_{-i}) \subset B^*$). Agora, para todo $m \in \mathbb{N}$ e todo $x_i \in X_i$, $H_i(x^m_{-i}, \widehat{x}^m_i) \geq H_i(x^m_{-i}, x_i)$ pois $\widehat{x}^m_i \in B_i(x^m_{-i})$. Tomando límites e usando a continuidade de H_i tense que, para todo $x_i \in X_i$, $H_i(\overline{x}_{-i}, x^0_i) \geq H_i(\overline{x}_{-i}, x_i)$. Polo tanto $x^0_i \in B_i(\overline{x}_{-i})$ o cal é unha contradición.

Tense entón que B satisface as hipótesis do Teorema de Kakutani, e, polo tanto ten un punto fixo. Agora ben, se x é un punto fixo de B, entón x é un equilibrio de Nash do xogo G. □

Para enteder mellor o concepto de equilibrio de Nash e en que consiste a teoría de xogos, imos ver un exemplo:

Exemplo 4.17 (Dilema do prisioneiro)**.** Supoñamos unha situación na que somos detidos con outra persoa por un delito de roubo. A pena por este delito é de dous anos de cárcere. A policía sabe que tamén houbo un ferido por arma de fogo, pero non sabe cal dos dous detidos foi o culpable; a pena por este outro delito é de cinco anos de prisión.

Ambos ladróns estamos totalmente incomunicados entre nós, e no interrogatorio a policía proponnos a cada un o seguinte trato: se delatamos ó noso compañeiro como autor do disparo, estaremos soamente un ano no cárcere, mentres que o noso compañeiro estará dez.

Para poder ver máis claramente a situación, imos representar a chamada matriz de decisión. (Véxase o Cadro 4.1).

Como non sabemos o que fará o noso compañeiro, a mellor situación é delatalo independentemente do que faga el, xa que se nos delata, iremos cinco anos en vez de dez, e se

Prisioneiro 2 \ Prisioneiro 1	Non delatar	Delatar
Non delatar	(2,2)	(10,1)
Delatar	(1,10)	(5,5)

Cadro 4.1: Dilema do prisioneiro

non nos delata iremos un en vez de dous.

A mellor situación para ambos, sería que non nos delatásemos e estivesemos no cárcere dous anos cada un, pero dado que ó final o máis probable é que o compañeiro pense como nós o fixemos, cada un pasaremos cinco anos en prisión. Esta situación alcanzada é o chamado equilibrio de Nash, porque ambas partes non poden cambiar sen empeorar a súa propia situación.

Bibliografía

[1] J. P. Aubin e A. Cellina, *Differential Inclusions,* Springer-Verlag, 1984.

[2] H. Brézis, *Análisis funcional. Teoría y aplicaciones*, Alianza Editorial, 1984.

[3] B. Casas Méndez, G. Fiestras-Janeiro, I. García-Jurado e J. González, *Introducción a la teoría de juegos*, Manuais Universitarios, Vol. 15. USC Editora, 2012.

[4] K. Deimling, *Multivalued Differential Equations*, Walter de Gruyter, 1992.

[5] S. Djebali, L. Górniewicz e A. Ouahab, *Solution sets for differential equations and inclusions*, Walter de Gruyter, 2013.

[6] J. González, I. García-Jurado e G. Fiestras-Janeiro, *An introductory course on mathematical game theory*, American Mathematical Society, Vol. 115, 2010.

[7] J. Graef, J. Henderson e A. Ouahab, *Topological methods for differential equations and inclusions*, CRC Press, 2019.

[8] O. Hákej, Discontinuous differential equations, *Journal of Differential Equations*, 32 (1979), 149-170.

[9] J.B. Hiriart Urruty, Images of connected sets by semicontinuous multifunctions, *Journal of Mathematical Analisys and Applications*, 111 (1985), 407–422.

[10] J. Munkres, *Topología*, 2ª edición, Prentice Hall, 2002.

[11] D. O'Regan, Y. J. Cho e Y.Q. Chen, *Topological degree theory and applications*, CRC Press, 2006.

[12] V.R. Ríos, *Curso introductorio sobre inclusiones diferenciales*, Escuela Venezolana de matemáticas, 2016.